UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Análisis matemático de algunos juegos de mesa

Autor/es

LEYRE GORT MUÑOZ

Director/es

EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN IRIGARAY

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Análisis matemático de algunos juegos de mesa

Realizado por:

Leyre Gort Muñoz

Tutelado por:

Eduardo Sáenz de Cabezón

Logroño, Julio, 2020

Resumen

En este trabajo fin de grado se estudiarán diferentes juegos de mesa que nos servirán para ver una aplicación distinta de las matemáticas. A su vez, aprenderemos que nos pueden servir de ayuda para explicar conceptos matemáticos y poder amenizar las clases.

En primer lugar estudiaremos juegos de mesa en los que se utilizan dados. Utilizando para ello sobretodo como herramienta la probabilidad y haciendo un análisis de los mismos. Después examinaremos juegos en los que se nos presentan conceptos matemáticos más complejos.

Para terminar, veremos algunos de los juegos combinatorios más estudiados a lo largo del tiempo, tales como el tres en raya, las damas y el ajedrez. Buscando, cuando sea posible, una estrategia ganadora.

Abstract

In this final degree project we will study different board games which will help us see a different application of mathematics. At the same time, we will learn that they can help us to explain mathematical concepts and make lessons easier.

In first place, we will study board games that use dices. Using mostly probability and making an analysis of them. Later, we will examine games in which we will learn about more complex mathematical concepts.

Lastly, we will see some of the most known combinatorial board games such as tic tac toe, checkers and chess. Searching a winning strategy, whenever it is possible.

Índice general

Introducción y motivación

Con este trabajo se intenta mostrar una aplicación de las matemáticas diferente a la que estamos acostumbrados a ver en las aulas, utilizando para ello, juegos de mesa. Estos juegos se podrían utilizar en clases de secundaria, bachillerato o universidad, para hacer una clase más amena, dado que a menudo, las clases se pueden hacer pesadas de seguir, por lo que de vez en cuando podría ser recomendable cambiar un poco la forma de impartirlas. Todos hemos jugado alguna vez a un juego de mesa, aunque sea al más simple como es el tres en raya. Pero cuando jugamos por diversión, no solemos parar a pensar en las posibles matemáticas que hay de fondo, o si podríamos definir una estrategia ganadora haciendo uso de los conocimientos matemáticos que tenemos.

Siguiendo con el ejemplo del tres en raya, una vez que jugamos un par de veces, nos damos cuenta fácilmente de que, si jugamos de forma óptima, siempre podemos forzar un empate con el otro jugador, pero, ¿sabríamos explicar por qué siempre se termina en tablas? Se podría explicar de forma que todos lo entendiéramos, pero dar una descripción exacta de qué esta ocurriendo requiere un nivel más alto de detalle. En este trabajo no se estudiarán conceptos complicados, sino que se utilizarán conceptos estudiados durante la carrera, por lo que, teniendo un nivel básico en matemáticas, se pueden entender la mayoría de los conceptos y ser capaz de aplicarlos a los juegos de mesa que se estudian.

El uso de juegos de mesa como demostración práctica de conceptos matemáticos se puede utilizar tanto en la educación matemática, como en la divulgación. Este trabajo intenta enfocarse sobretodo en estos campos. Haciendo que se puedan dar clases más entretenidas y sencillas de comprender para los alumnos, dándoles la oportunidad de probar por ellos mismos los juegos e intentando que lleguen ellos solos a las conclusiones con los conocimientos adquiridos previamente. Los juegos de mesa pueden llegar a ser un recurso educativo de gran importancia con los que se pueden estudiar diferentes campos de las matemáticas.

Este trabajo se distribuye en tres capítulos que engloban diferentes juegos de mesa, la mayoría de los cuales el lector conocerá y habrá jugado en algún momento, por lo que estará familiarizado con las reglas de los mismos. Los juegos están agrupados en capítulos que se diferencian en el modo de juego. El primer capítulo se centra en los juegos en los que se utilizan dados para avanzar en la partida. Para estos juegos utilizaremos la estadística, haciendo uso de la probabilidad como principal herramienta para describir una estrategia ganadora en los casos en los que sea posible. En el segundo capítulo se verán unos juegos un poco diferentes a los estudiados en el primer capítulo, en los que podemos encontrar matemáticas muy interesantes. Y para finalizar, el últimos capítulo está dedicado a los juegos combinatorios, los más estudiados matemáticamente para intentar desarrollar una estrategia ganadora, o ver cómo si se puede forzar un empate.

También debemos destacar el uso de las matemáticas para crear estos juegos. El creador de los juegos debe estudiar si el juego está equilibrado, si es justo, cómo debe ser el tablero en el que se va a jugar o cómo deben ser las reglas para que los jugadores tengan las mismas posibilidades de ganar. O por el contrario, quizá pueda incluir alguna regla o algún concepto del juego que permita a un jugador experto, o un jugador que haya jugado varias veces, notarlo y aprovecharlo para ganar el juego con más facilidad, lo que podríamos denominar como encontrar una estrategia ganadora para un determinado jugador.

El motivo de elegir los juegos de mesa para este Trabajo Fin de Grado se debe a intereses personales. Siempre me ha gustado jugar a juegos de mesa con amigos, por lo que, junto con mi tutor, intentamos ver si podríamos hacer un trabajo acerca de estos. Aunque al principio solo nos íbamos a centrar en un juego de mesa, al final decidimos hacer un trabajo en el que se estudiara un número más amplio de estos para poder tener más variedad de juegos, llegando a la distribución final de los capítulos. Durante el desarrollo del trabajo, comenzamos a ver que quizá este podría ser de utilidad para profesores de secundaria o profesores de didáctica de las matemáticas, para hacer una clase en la que se utilice un juego de mesa para explicar los conceptos que se han visto durante la teoría. Utilizar juegos de mesa como una herramienta para enseñar matemáticas puede servir además, para desarrollar una serie de valores en la vida cotidiana como puede ser el respeto por las reglas y aprender a jugar en equipo con otros compañeros en el caso de los juegos cooperativos.

Por ello, en este trabajo hemos intentado que, al principio de cada juego y a lo largo del mismo, haya un breve apartado con cada uno de los conceptos que se van a utilizar para estudiarlo, haciendo que el lector tenga siempre a mano los conceptos utilizados.

Capítulo 1

Juegos con dados

1.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos cómo influyen las matemáticas en algunos juegos de mesa en los que se utilizan principalmente dados, ya sea para crear estrategias que nos permitan ganar con más facilidad o ver la dificultad del juego a la hora de estudiarlo matemáticamente. Para ello utilizaremos tres juegos diferentes, en los que podremos ver la diferencia de dificultad en el estudio de los mismos. Veremos también, siempre que sea posible, cuál es la mejor estrategia a seguir para poder ganar la partida. Es muy común ver problemas de dados en ejercicios relacionados con la estadística, ya sea para calcular la probabilidad de sacar un determinado número, como la probabilidad de sacar un número par o impar.

Una de las aplicaciones de la **estadística** es el estudio de los fenómenos de azar, es decir, de aquellos que producen resultados inciertos. La **probabilidad** es el cálculo que se utiliza como medida de estos fenómenos. El origen de la probabilidad se debe buscar en el estudio de los juegos de azar. Los jugadores deseaban conocer si existía alguna regla que les permitiera entender mejor el juego, para así poder ganar con más facilidad. Nosotros realizaremos el estudio de la probabilidad desde el punto de vista axiomático, según la teoría de Kolmogorov (1903-1987). Según el sistema propuesto por Kolmogorov, los sucesos se representan como conjuntos y la probabilidad de que se den estos sucesos, como una medida normada de estos conjuntos. Veamos algunas definiciones que nos servirán para estudiar los juegos, estas definiciones se han cogido de apuntes estudiados durante la carrera [20].

Definición 1.1. *Denominamos* ***experimentos aleatorios*** *a aquellos que no se puede predecir cuál va a ser el resultado. A cada uno de los posibles resultados del mismo se le denomina* ***suceso aleatorio****.*

Definición 1.2. *Definimos* ***sucesos elementales*** *a los sucesos más simples que se pueden obtener de la realización de un experimento aleatorio.*

Definición 1.3. *Al conjunto de todos los posibles sucesos elementales de un experimento se le denomina* ***espacio muestral****. Se le suele denotar por* Ω*.*

Definición 1.4. *Cada subconjunto del espacio muestral es un suceso y puede ser* ***elemental*** *o* ***compuesto****.*

Por ejemplo. Si lanzamos un dado, lo que es un suceso aleatorio, tenemos el siguiente espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El suceso *A=sacar un 1*=$\{1\}$ es un suceso elemental, mientras que *B=sacar un número par*=$\{2, 4, 6\}$ es un suceso compuesto.

Debemos notar que un mismo experimento puede dar lugar a diferentes espacios muestrales, dependiendo de lo que queramos estudiar en cada uno.

Para obtener la probabilidad de un determinado suceso utilizaremos la **probabilidad clásica o Regla de Laplace**. Laplace (1749-1827) propuso la siguiente fórmula:

Definición 1.5. *Si todos los resultados de un experimento tienen la misma posibilidad de ocurrir, la* ***probabilidad de ocurrencia de un suceso A*** *será:*

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables a A}}{\textit{número de casos posibles}}$$

Siendo los casos posibles todos los casos que se pueden dar, y los casos favorables a A, aquellos en los que obtenemos el suceso.

Siguiendo el ejemplo dado anteriormente, la probabilidad de obtener un 1 será

$$P(1) = \frac{1}{6} = 0{,}1\hat{6}$$

Definición 1.6. *Decimos que dos sucesos son* ***independientes*** *cuando la ocurrencia del primero no implica que la probabilidad de que ocurra el segundo cambie. Luego la probabilidad de que se den ambos, será la probabilidad de uno por la probabilidad de otro, es decir:*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Nos podemos plantear cuál será la probabilidad de un suceso B, sabiendo que ha sucedido otro suceso A. Esta probabilidad se conoce como **probabilidad condicionada**, y se calcula de la siguiente forma:

La probabilidad del segundo suceso, B, dado que conocemos que ha ocurrido el primero suceso, A, o bien la probabilidad del que se de el suceso B condicionado a que ha ocurrido el suceso A es:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ siendo } P(A) > 0$$

De aquí se deduce la fórmula de la **probabilidad compuesta**, en el caso particular de 2 sucesos. La probabilidad de que ocurran dos sucesos A y B simultáneamente es la probabilidad de que ocurra uno multiplicado por la probabilidad de que ocurra el otro dado que ha ocurrido el primero:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Una vez que hemos visto algunas definiciones que utilizaremos más adelante, empezamos con el juego *Can't Stop*, un juego sencillo donde utilizaremos la probabilidad de los dados para poder determinar una estrategia.

1.2. Can't Stop

Este juego está compuesto por un tablero con 12 columnas y 3 escaladores por jugador. El objetivo del juego consiste en ser el primer jugador en alcanzar la cima de 3 columnas, para lo cual se utilizarán dados para hacer que nuestro escalador vaya escalando por cada columna. Durante su turno, cada jugador tira 4 dados y elige 2 de ellos. La suma de esos dos dados será la columna en la que pondrá a uno de sus escaladores. Si en los 4 dados aparece el mismo número, como la suma de cada par de ellos será la misma, el jugador moverá su escalador dos peldaños en lugar de uno. Una vez haya colocado a los tres escaladores en tres columnas distintas, puede elegir entre seguir tirando o parar. Si elige seguir tirando dados, solo podrá mover los escaladores que ya estén colocados, es decir, necesitará obtener el número de la columna en el que se encuentren con la suma de dos de los dados tirados. Si no consigue ninguno de los tres números de las columnas donde tenga a los escaladores, estos se caerán hasta el último campamento colocado. El campamento es la última posición en la que ha decidido parar, en el caso en el que no haya parado ninguna vez, todos los escaladores volverán a la casilla de inicio. Si por el contrario decide parar una vez seleccionadas las tres columnas, el jugador establecerá un campamento en esas columnas a la altura a la que se encontrara el escalador. Una vez establecido el campamento, al tirar los dados durante el siguiente turno, el jugador puede elegir entre columnas por las que no había escalado anteriormente, o las que ya habían sido escaladas y comenzar a escalar desde el último campamento establecido. Puede haber un campamento en cada columna, y más de un jugador puede tener un campamento en una columna. Una vez que un jugador llega a la cima de una columna, reclama esa columna y los demás jugadores no podrán escalar por ella.

Las columnas están numeradas del 2 al 12 dado que estos son los posibles números que podemos obtener al sumar dos dados. Estas columnas no tienen la misma longitud. Por ejemplo, la columna del 2 solo tiene 3 peldaños, mientras que la columna 7 tiene un total de 13 peldaños para llegar a la cima.

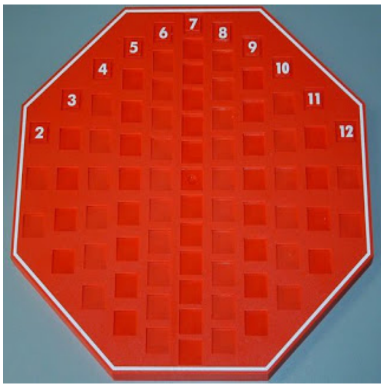


Figura 1.1: Tablero del juego

La razón por la que las columnas tienen diferentes longitudes, es debido a la probabilidad que tienen de aparecer los números. Veamos cuáles son los eventos que se pueden dar para obtener cada número tirando solo dos dados, y la probabilidad de los mismos. Los eventos tirando dos dados son los siguientes:

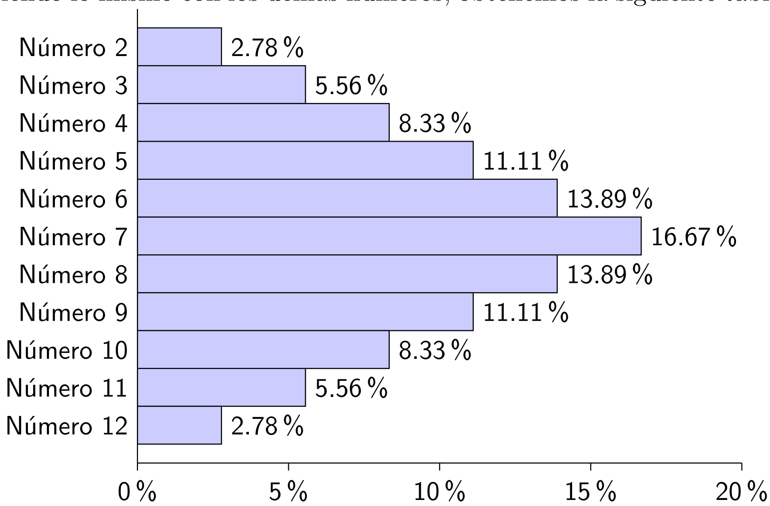
- **Número 2:** $\{1+1\}$
- **Número 3:** $\{1+2;\ 2+1\}$
- **Número 4:** $\{1+3;\ 2+2;\ 3+1\}$
- **Número 5:** $\{1+4;\ 2+3;\ 3+2;\ 4+1\}$
- **Número 6:** $\{1+5;\ 2+4;\ 3+3;\ 4+2;\ 5+1\}$
- **Número 7:** $\{1+6;\ 2+5;\ 3+4;\ 4+3;\ 5+2;\ 6+1\}$
- **Número 8:** $\{2+6;\ 3+5;\ 4+4;\ 5+3;\ 6+2\}$
- **Número 9:** $\{3+6;\ 4+5;\ 5+4;\ 6+3\}$
- **Número 10:** $\{4+6;\ 5+5;\ 6+4\}$
- **Número 11:** $\{5+6;\ 6+5\}$
- **Número 12:** $\{6+6\}$

Como ya podemos observar, tenemos más formas de obtener un 7. Veamos la probabilidad de obtener un 2 y un 3. A partir de ellos, la probabilidad de los demás números se calcularán de la misma manera.

La probabilidad de obtener un 2, será la probabilidad de sacar dos 1, por lo que tendremos $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\approx 2{,}78\,\%$.

La probabilidad de obtener un 3, será la probabilidad de sacar un 1 y un 2 más la probabilidad de sacar un 2 y un 1. Luego la probabilidad será $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}\approx 5{,}56\,\%$.

Haciendo lo mismo con los demás números, obtenemos la siguiente tabla con las probabilidades de cada número:



Como ya habíamos podido observar antes, el número 7 es el que más probabilidades tiene de salir, debido a que hay 6 formas diferentes de sumar 7, mientras que los números 2 y 12 son los que menos probabilidades tienen de salir, ya que solo se pueden conseguir con una forma de sumar.

Estos cálculos no nos sirven para este juego en concreto ya que, aunque elegimos dos dados de los 4 que lanzamos, la probabilidad al tirar 4 dados no es exactamente la misma, por lo que estos cálculos serían una aproximación del problema real. Al tener 4 dados el problema se complica, haciendo que sea apto, por ejemplo, para una actividad a nivel de grado en un curso de probabilidad.

Comenzamos por ver de cuántas formas podemos elegir 2 dados de entre los 4 que lanzamos. Como de cuatro dados elegimos dos, tendremos que calcular $\binom{4}{2}$.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Por lo que tenemos 6 formas diferentes de elegir estos dos dados.

Ahora debemos tener en cuenta una serie de casos. Si los cuatro dados tienen el mismo valor, no tenemos ninguna opción de número, ya que, elijas los dados que elijas, siempre obtendrás la misma suma. También podemos observar que la suma de dos dados con el mismo valor siempre es un número par, por lo que podría parecer que los números pares deberían tener alguna variación con respecto a los impares. Además, si al lanzar los dados, todos tienen un valor distinto, siempre se podrá sumar 7 ya que, si tenemos que $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$, al elegir cuatro números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, siempre obtendremos alguna de las tres posibles sumas. Calculemos estas probabilidades para ver cómo cambiaría el gráfico anterior. Empezaremos viendo la probabilidad de que todos los dados muestren el mismo número y terminaremos con la probabilidad de que todos los números sean distintos.

1. Probabilidad de obtener todos los dados con el mismo valor: Como no estamos viendo ningún caso concreto de número, el primer número puede ser cualquiera, los demás números estarán condicionados por el primer número obtenido, por lo que la probabilidad será:

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}46\,\%$$

2. Probabilidad de obtener 3 números iguales: Al igual que antes, el primer número puede ser cualquiera, los dos números iguales a él tendrán probabilidad $\frac{1}{6}$ ya que están obligados a ser el mismo, y el número diferente será $\frac{5}{6}$, ya que podrá ser cualquier número distinto del elegido inicialmente. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el número que es distinto puede aparecer en cualquiera de los 4 dados lanzados. Luego la probabilidad será:

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \binom{4}{1} \approx 9{,}25\,\%$$

3. Probabilidad de obtener dos números iguales dos a dos: Será la probabilidad de obtener dos pares de números entre los 4 dados lanzados. Al igual que en los casos anteriores, el primer dado puede ser cualquier número y otro de los dados debe tener el mismo número, luego será $\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6}$. El tercer dado debe ser distinto de los dos primeros, por lo que quedan 5 números posibles, $\frac{5}{6}$ y el cuarto dado debe coincidir con el tercero, luego $\frac{1}{6}$, pero cada par podría ser cualquiera de los cuatro dados, por lo que tenemos $\binom{4}{2}$. Como elegir un par, corrige automáticamente al otro, estamos contando el orden 2 veces, por lo que tenemos que dividir por 2. La probabilidad final será:

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{2} \approx 6{,}94\,\%$$

4. Probabilidad de obtener solo un par del mismo número: El primer y el segundo dado se eligen de la misma forma que antes. El tercer y el cuarto número tendrán que ser números distintos al número ya elegido y entre ellos, por lo que tendrán probabilidad $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{6}$, respectivamente. Pero, el par puede ser cualquiera de los cuatro que se lanzan, luego tendremos que multiplicar por $\binom{4}{2}$. La probabilidad será:

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \binom{4}{2} \approx 55{,}55\,\%$$

5. Probabilidad de obtener todos los dados distintos: Como cada número debe ser distinto, tendremos que la probabilidad será:

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \approx 27{,}78\,\%$$

Con estos tipos de lanzamientos y sus respectivas probabilidades, pasaremos a la distribución de sumas disponibles dentro de cada tipo de lanzamiento. Estas probabilidades se pueden dividir de la siguiente forma:

1. La suma de dos valores iguales entre si, por ejemplo $2 + 2$ (Igual).
2. La suma de dos valores diferentes, por ejemplo $2 + 3$ (Dos diferentes).
3. La suma de dos de tres valores diferentes, por ejemplo, si tenemos $1, 2, 3$, podría ser $1 + 2$, $2 + 3$, $1 + 3$ (Tres diferentes).
4. La suma de dos de cuatro valores diferentes, por ejemplo, si tenemos $1, 2, 3, 4$, podría ser $1+2$, $1+3$, $1+4$, $2 + 4$, ... (Cuatro diferentes).

Cada uno de los tipos de tiradas que podemos obtener, calculada su probabilidad anteriormente, se pueden descomponer en estas distribuciones, quedando de la siguiente forma:

1. **Si todos los dados son iguales (AAAA):** Igual (AA).
2. **Si solo tres dados son iguales (AAAB):** Igual (AA) + Dos diferentes (AB).
3. **Si dos dados son iguales dos a dos (AABB):** 2· Igual (AA, BB) + Dos diferentes (AB).
4. **Si solo tenemos dos dados iguales (AABC):** Igual (AA) + Tres diferentes (AB,AC,BC) - superposición (AA=BC)[1].
5. **Si todos los dados son distintos (ABCD):** Cuatro diferentes (AB,AC,AD,BC,BD,CD).

Esta superposición la omitiremos por ahora, retomándola más adelante.

Con esta clasificación, podríamos calcular, por ejemplo, la probabilidad de obtener un 7. En este caso sería la siguiente:

$$9{,}25\,\% \cdot \text{Igual}(7) + 6{,}94\,\% \cdot (2 \cdot \text{Igual}(7) + \text{Dos diferentes}(7))+$$
$$55{,}5\,\% \cdot (\text{Igual}(7) + \text{Tres diferentes}(7)) + 27{,}7\,\% \cdot \text{Cuatro diferentes}(7)$$

Teniendo esto, podemos calcular la distribución de cada número. En la página web [13], han calculado estas distribuciones de la siguiente forma. Para el caso de los valores iguales, como los dados tendrán el mismo valor solo podremos obtener números pares, luego la probabilidad de obtener un número impar será 0. Esto lo podemos calcular sin ayuda de un ordenador ya que los posibles casos serán $\{1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6\}$, cuyas sumas son $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ respectivamente. Luego, aplicando la regla de Laplace 1.5, tenemos $\frac{1}{6} = 16{,}67\,\%$ de obtener un 2. Si hacemos lo mismo con el resto de números obtenemos la misma cifra. Para el caso en el que tenemos dos diferentes, se puede calcular escribiendo a mano los números y contando cuáles suman cada número. Para el resto de números podemos hacer que el ordenador calcule las combinaciones de los números y ver que números suman cada uno, por último volver a repetir la operación de los casos favorables entre los casos posibles. Para tres números distintos tenemos más casos posibles por lo que escribirlos a mano puede llevar un rato. Calculando todos los porcentajes obtenemos la siguiente tabla:

Suma	**Iguales**	**Dos diferentes**	**Tres diferentes**	**Cuatro diferentes**
2	16.67 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %
3	0.00 %	6.67 %	20.00 %	40.00 %
4	16.67 %	6.67 %	20.00 %	40.00 %
5	0.00 %	13.33 %	40.00 %	73.33 %
6	16.67 %	13.33 %	40.00 %	73.33 %
7	0.00 %	20.00 %	60.00 %	100.00 %
8	16.67 %	13.33 %	40.00 %	73.33 %
9	0.00 %	13.33 %	40.00 %	73.33 %
10	16.67 %	6.67 %	20.00 %	40.00 %
11	0.00 %	6.67 %	20.00 %	40.00 %
12	16.67 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %

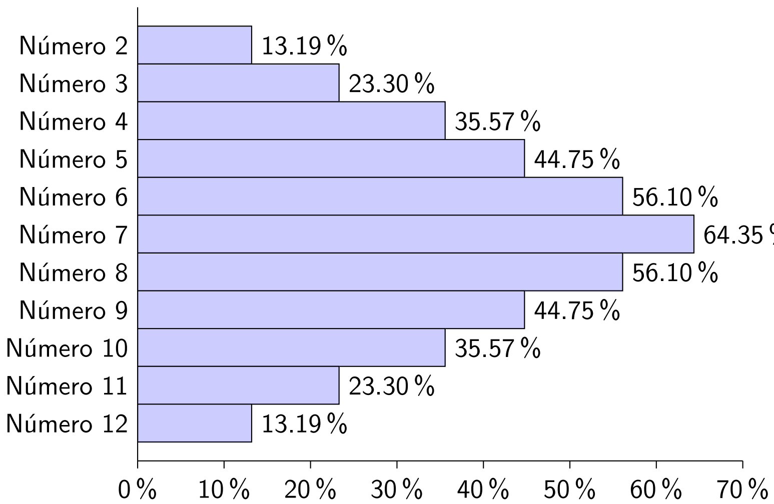
Si utilizamos estos valores para calcular la probabilidad de obtener un 7, tenemos:

$$9{,}25\,\% \cdot 0\,\% + 6{,}94\,\% \cdot (2 \cdot 0\,\% + 20\,\%) + 55{,}5\,\% \cdot (0\,\% + 60\,\%) + 27{,}7\,\% \cdot 100\,\% = 62{,}38\,\%$$

Este valor lo hemos obtenido al utilizar los valores redondeados de las probabilidades calculadas anteriormente, por lo que el verdadero valor sin los errores de redondeo es 64,35 %.

[1] Esta superposición ocurre cuando tomamos los dados AA, el otro par que nos queda será el BC, por lo que estamos en el mismo caso que si tomamos BC.

Podemos realizar el mismo proceso para el resto de números, pero primero debemos analizar la superposición que hemos omitido antes. Al lanzar los dados, es posible que dos valores diferentes tengan la misma suma que el par de valores iguales, por ejemplo en la tirada $\{1,2,2,3\}$ podemos sumar 4 mediante $2+2$, pero también con $1+3$. La fórmula anterior cuenta cada uno de estos casos dos veces, una en la distribución *Igual* y otra en la distribución *Tres diferentes*. Pero esto solo puede ocurrir con sumas cuyo resultado sea un número par, ya que la suma de dos números iguales es un número par. Concretamente, esto se da cada vez que los dos dados que son diferentes suman ese número par, y nosotros hemos calculado el número de posibilidades en que dos valores únicos se pueden sumar para cada posible suma al generar la distribución de *Dos diferentes*. Por lo tanto, para las sumas pares, la superposición que debemos restar será Dos diferentes $\cdot \frac{15}{60}$. Al multiplicar por 15, nos devuelve a la cantidad de formas en que dos valores únicos pueden sumarse obteniendo la suma par, dado que de 6 pares cogemos 2 ($\binom{6}{2} = 15$), y al dividir entre 60, nos aseguramos de que solo contamos cada forma una vez de las sesenta formas posibles de obtener exactamente un par entre 4 dados $\left(\binom{6}{3} \cdot 3 = 60\right)$. Con todo esto, podemos finalmente calcular las probabilidades para cada suma de números posibles en *Can't Stop*.



Conociendo las reglas del juego y teniendo en cuenta la probabilidad de cada número, podemos describir una estrategia que nos permita tener más oportunidades de ganar en el juego. Como solo tenemos 3 escaladores, solo podremos elegir 3 diferentes columnas por las que escalar durante cada turno. Dado que las columnas con menos probabilidad tienen menos peldaños para llegar a la cima, es conveniente intentar colocar a uno de los escaladores en una de estas columnas, ya que solo con 3 peldaños, el escalador habrá llegado a la cima y ganaremos fácilmente esa columna. Por otro lado, los otros dos escaladores los tendremos que intentar colocar en las columnas que más probabilidades tienen de salir, es decir, en la columna del 6, 7 u 8. Esto nos permitirá poder seguir escalando con los escaladores que se encuentren en los números más probables mientras que, si sale uno de los números menos probables, tendremos menos peldaños por escalar para conseguir la columna. También hay que tener en cuenta que si paramos de escalar, podremos tener un campamento en una de las columnas menos probables, lo que nos hará que, si durante los siguientes turnos nos aparece ese número, sea más sencillo llegar a la cima. Aunque no es una estrategia que permita ganar siempre debido a la aleatoriedad de los dados, esta estrategia nos ofrece mayores posibilidades de ganar.

Este juego es un ejemplo donde calcular una aproximación de la probabilidad de los dados es asequible y, además, podemos determinar una estrategia que nos permita ganar con más facilidad. Por lo que podría ser un ejemplo para utilizar con alumnos que tengan un nivel básico de matemáticas, por ejemplo en secundaria, proponiendo el juego y dejando a los alumnos buscar cuál sería la estrategia a seguir y por qué han elegido esa estrategia. Veamos qué ocurre en el caso del monopoly, donde también se utilizan dos dados para jugar pero tenemos más variables, como las tarjetas de juego, las posibles tiradas o un tablero más amplio.

1.3. Monopoly

Para entender el funcionamiento de los algoritmos que se han utilizado para estudiar el juego, daremos una serie de definiciones previas, cogidas de apuntes estudiados durante la carrera [5].

Definición 1.7. *Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias $\{X_\theta\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad común. La familia está indexada por un parámetro θ, donde θ pertenece a un conjunto de índices I.*

Definición 1.8. *En el contexto de los procesos estocásticos, cada valor que puede tomar una variable aleatoria X_θ se le denomina **estado**.*

Las **cadenas de Markov** deben su nombre al profesor Andrei A. Markov (1856-1922). Estudiaremos los procesos estocásticos que cumplen la **propiedad de Markov**:

$$P(X_n|X_1, \cdots, X_{n-1}) = P(X_n|X_{n-1})$$

Una regla informal para recordar la propiedad de Markov es la siguiente: "Dado el presente (X_{n-1}), el futuro (X_n) es independiente del pasado ($X_1, \cdots, X_{n-2}$).

Si las probabilidades condicionadas $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ son independientes del índice temporal n, diremos que la cadena de Markov es **homogénea** y denotamos

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i), \forall i, j \in E$$

La probabilidad p_{ij} denota la probabilidad de que el proceso haga una transición desde el estado i al estado j.

Definición 1.9. *La matriz formada por las probabilidades de transición p_{ij}*

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

*se llama **matriz de transición de un paso** del proceso de Markov.*

El juego del Monopoly es uno de los más conocidos en todo el mundo. Las reglas son sencillas, gana el jugador que no se arruine. Al comienzo de la partida, a cada jugador se le asignarán 150000 pesetas, esta cifra puede variar dependiendo de la versión del juego, dado que la moneda que se utilice en cada juego, puede ser distinta. Con ese dinero, podrá comprar propiedades en las que luego podrá edificar y cobrar un alquiler a cada jugador que caiga en ella, hipotecar la propiedad por un precio impuesto por la banca o venderla a otros jugadores por un precio acordado entre ambos. Posteriormente, si un jugador cae sobre esa casilla, tendrá que pagar un alquiler al propietario de la misma en función de las edificaciones que haya o de las propiedades que tenga, siendo el doble del alquiler si el jugador posee todo el barrio y no ha construido en dicha propiedad. Para avanzar por las casillas se utilizan dos dados. En el caso en el que se saque el mismo valor en los dos dados, es decir, obtengamos dobles, se deberá volver a tirar una vez más los dados. En el caso en el que se saque tres veces seguidas dobles, el jugador irá directamente a la cárcel, una casilla especial a la que se pueden ir de diferentes formas, y de la que solo se puede salir si se da uno de los siguientes casos. Esperando tres turnos, sacando dobles en cualquiera de sus tres turnos, pagando 5000 antes de lanzar los dados en cualquiera de los tres turnos, o utilizando la carta salir gratis de la cárcel. Aunque un jugador se encuentre en la cárcel, sigue cobrando sus alquileres y puede seguir comprando y vendiendo viviendas en las subastas o haciendo tratos con sus propiedades con otros jugadores. Debemos mencionar el trabajo recogido en el libro [7], donde hacen un estudio más amplio del juego.

Si calculamos la probabilidad de obtener cada número tirando los dados en este juego, tendremos el mismo gráfico 1.2 que teníamos para el juego *Can't Stop* para los números del 2 al 12 al tirar dos dados. Dado que este juego te permite volver a tirar los dados si se sacan dobles, tendremos que calcular también las probabilidades de obtener los números del 13 al 24. Si tenemos en cuenta que puede haber una tercera tirada sin que los dados sean dobles ya que sino el jugador iría a la cárcel, tendríamos que calcular la probabilidad de obtener desde el número 25 hasta el número 35. No calcularemos la probabilidad haciendo 3 tiradas ya que, además de que para los números del 25 al 35 las probabilidades son muy bajas, el cálculo de las probabilidades se complica.

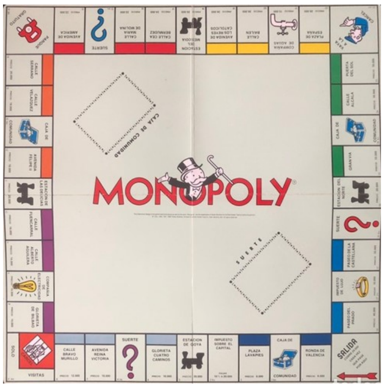


Figura 1.2: Tablero Monopoly

Aunque ya hemos calculado en el juego *Can't Stop* la probabilidad de obtener los números del 2 al 12 al tirar dos dados, debemos tener en cuenta que en este juego si obtienes dobles vuelves a tirar hasta tres veces, por lo que hay más eventos que solo tirando 2 dados. Debemos distinguir dos casos diferentes. Uno en el que tiremos los dados, movemos nuestra ficha y volvemos a tirar los dados, en el cual, por ejemplo, la probabilidad del 2 seguirá siendo $\frac{1}{36}$, y otro caso en el que suponemos que, si obtenemos dobles, directamente volvemos a tirar los dados sin mover la ficha, lo que haría que la probabilidad del 2 sea 0. Empezaremos por el primer caso. Para estos eventos tendremos en cuenta tres casos posibles. Podemos obtener el número deseado tirando solo una vez, tirando dos o tirando tres veces, dado que al obtener dobles volvemos a lanzar los dados. Es decir, por ejemplo, el número 6 podemos obtenerlo mediante los siguiente eventos. Si solo tiramos una vez, tenemos los siguiente eventos: $\{1+5;\ 5+1;\ 2+4;\ 4+2;\ 3+3\}$. Pero también podemos obtener el número 6 después de haber obtenido un 2 o un 4 mediante $\{1+1;\ 2+2\}$, es decir, mediante dobles. Al obtener dobles volvemos a lanzar los dados, por lo que los eventos después de haber obtenido dobles serán: $\{1+1+1+3;\ 1+1+3+1;\ 1+1+2+2;\ 2+2+1+1\}$. Si obtenemos dobles por segunda vez, volveríamos a tirar una tercera vez, luego el último evento sería $\{1+1+1+1+1+1\}$. Para resumir estos eventos, los eventos en los que se encuentren dobles los escribiremos como la suma del doble más lo que nos queda para llegar al número que estamos buscando, por ejemplo para el 6 escribiremos $\{1+1+4;\ 2+2+2\}$. Una vez tenemos esto, veamos que eventos se tienen que dar para obtener el resto de números del 2 al 24.

- **Número 2:** $\{1+1\}$
- **Número 3:** $\{1+2;\ 2+1\}$
- **Número 4:** $\{1+3;\ 3+1;\ 2+2;\ 1+1+2\}$
- **Número 5:** $\{1+4;\ 4+1;\ 2+3;\ 3+2;\ 1+1+3\}$
- **Número 6:** $\{1+5;\ 5+1;\ 2+4;\ 4+2;\ 3+3;\ 1+1+4;\ 2+2+2\}$
- **Número 7:** $\{1+6;\ 6+1;\ 2+5;\ 5+2;\ 3+4;\ 4+3;\ 1+1+5;\ 2+2+3\}$
- **Número 8:** $\{2+6;\ 6+2;\ 3+5;\ 5+3;\ 4+4;\ 1+1+6;\ 2+2+4;\ 3+3+2\}$
- **Número 9:** $\{3+6;\ 6+3;\ 4+5;\ 5+4;\ 1+1+7;\ 2+2+5;\ 3+3+3\}$
- **Número 10:** $\{4+6;\ 6+4;\ 5+5;\ 1+1+8;\ 2+2+6;\ 3+3+4;\ 4+4+2\}$
- **Número 11:** $\{5+6;\ 6+5;\ 1+1+9;\ 2+2+7;\ 3+3+5;\ 4+4+3\}$
- **Número 12:** $\{6+6;\ 1+1+10;\ 2+2+8;\ 3+3+6;\ 4+4+4;\ 5+5+2\}$
- **Número 13:** $\{1+1+11;\ 2+2+9;\ 3+3+7;\ 4+4+5;\ 5+5+3\}$
- **Número 14:** $\{1+1+12;\ 2+2+10;\ 3+3+8;\ 4+4+6;\ 5+5+4;\ 6+6+2\}$
- **Número 15:** $\{1+1+13;\ 2+2+11;\ 3+3+9;\ 4+4+7;\ 5+5+5;\ 6+6+3\}$
- **Número 16:** $\{1+1+14;\ 2+2+12;\ 3+3+10;\ 4+4+8;\ 5+5+6;\ 6+6+4\}$
- **Número 17:** $\{1+1+15;\ 2+2+13;\ 3+3+11;\ 4+4+9;\ 5+5+7;\ 6+6+5\}$
- **Número 18:** $\{1+1+16;\ 2+2+14;\ 3+3+12;\ 4+4+10;\ 5+5+8;\ 6+6+6\}$

- **Número 19:** $\{1+1+17;\ 2+2+15;\ 3+3+13;\ 4+4+11;\ 5+5+9;\ 6+6+7\}$
- **Número 20:** $\{1+1+18;\ 2+2+16;\ 3+3+14;\ 4+4+12;\ 5+5+10;\ 6+6+8\}$
- **Número 21:** $\{1+1+19;\ 2+2+17;\ 3+3+15;\ 4+4+13;\ 5+5+11;\ 6+6+9\}$
- **Número 22:** $\{1+1+20;\ 2+2+18;\ 3+3+16;\ 4+4+14;\ 5+5+12;\ 6+6+10\}$
- **Número 23:** $\{1+1+21;\ 2+2+19;\ 3+3+17;\ 4+4+15;\ 5+5+13;\ 6+6+11\}$
- **Número 24:** $\{1+1+22;\ 2+2+20;\ 3+3+18;\ 4+4+16;\ 5+5+14;\ 6+6+12\}$

La probabilidad de obtener un 6, será la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos, para ello calculamos la probabilidad de cada evento. La probabilidad de obtener las sumas simples, es decir, aquellas en las que no hemos obtenido dobles, será $\frac{1}{36}$ dado que la probabilidad de obtener cada número es $\frac{1}{6}$. Por otro lado, las probabilidades en las que tenemos dobles son de la siguiente forma:

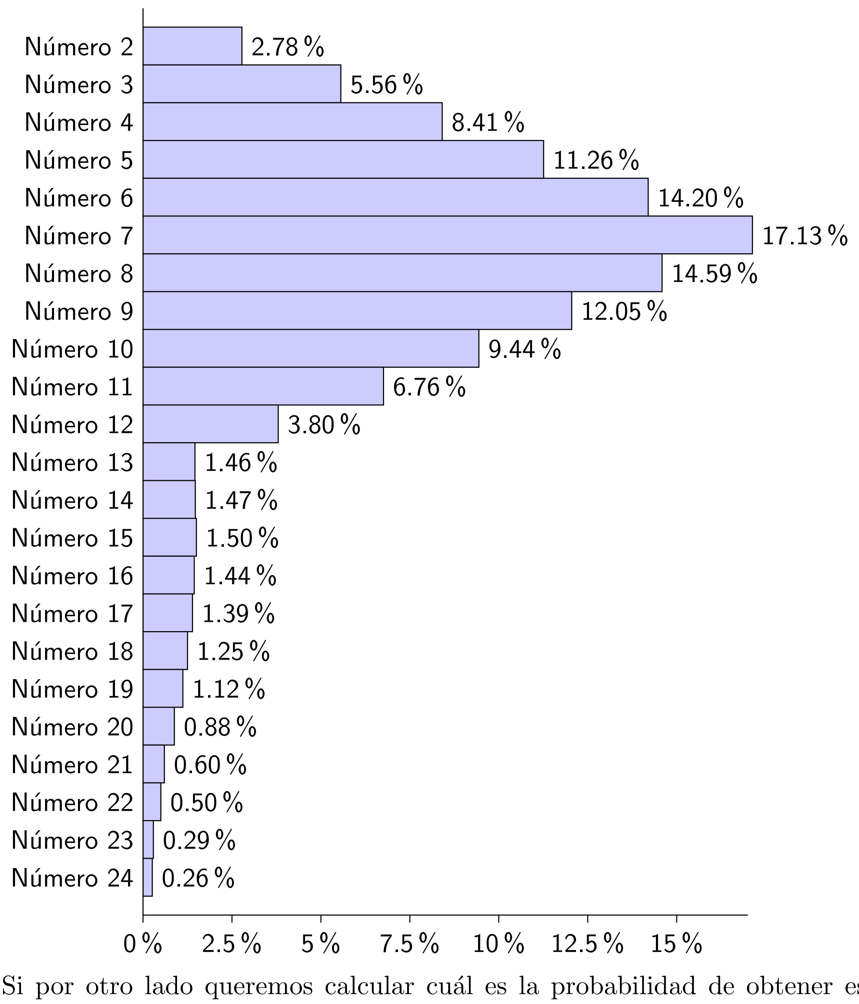
$$P(1+1+4) = \frac{1}{36} * P(4) = \frac{1}{36} * \frac{109}{1296} = \frac{109}{46656}$$

$$P(2+2+2) = \frac{1}{36} * P(2) = \frac{1}{36} * \frac{1}{36} = \frac{1}{1296}$$

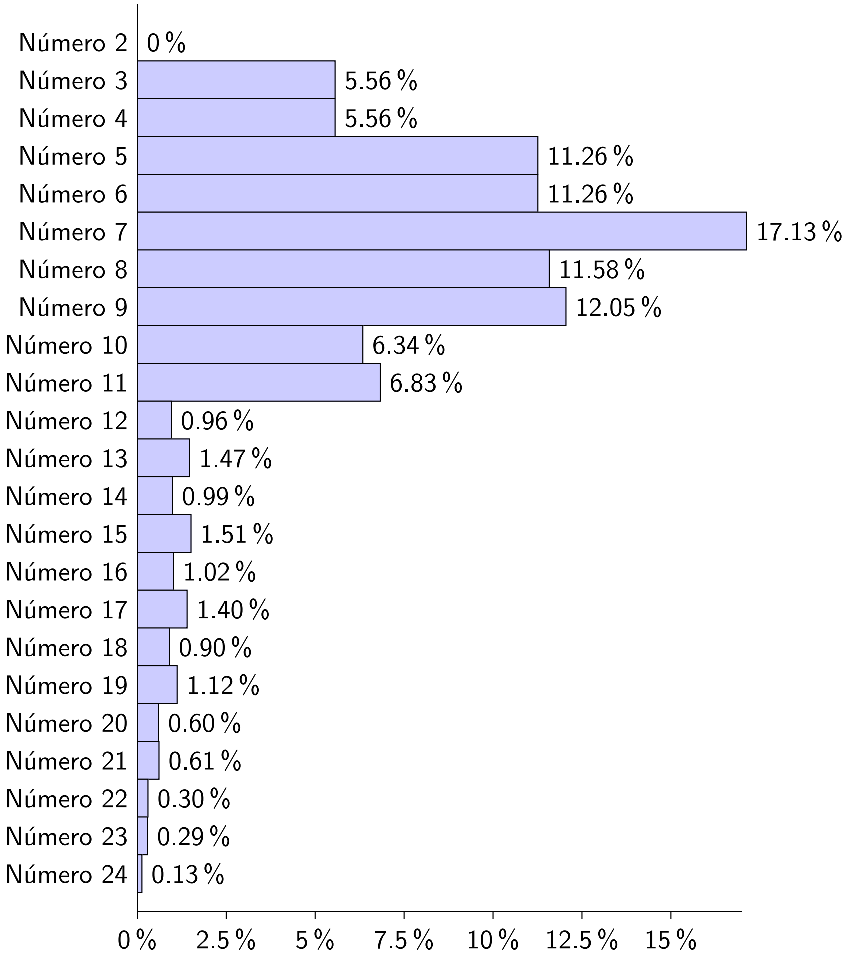
Por lo tanto, sumando las probabilidades de cada uno de los eventos, tenemos que la probabilidad de obtener un 6 es:

$$P(6) = \frac{5}{36} + \frac{109}{46656} + \frac{1}{1296} = \frac{6625}{46656} \approx 14{,}20\,\%$$

Haciendo lo mismo con el resto de números, obtenemos la siguiente gráfica que muestra la probabilidad de cada número.



Si por otro lado queremos calcular cuál es la probabilidad de obtener estos números teniendo en cuenta que una vez tiramos los dados, si obtenemos dobles, volvemos a tirar automáticamente sin movernos ninguna casilla, los eventos varían. En este caso, no podremos tener por ejemplo, $1+1$ para el 2 o $2+2$ para el 4, dado que, si obtenemos esos dados, volveremos a tirar directamente. En resumen, lo que haremos será obtener la probabilidad del número final que se obtiene al realizar, como mucho, 3 tiradas. En este caso no volveremos a escribir todos los eventos para cada número ya que serán los mismos quitando aquellos que se formen utilizando dobles, como podrían ser el $1+1$ o el $1+1+2+2$. Calculando las probabilidades de la misma forma que antes, obtenemos la siguiente gráfica:



Como podemos observar, la segunda gráfica difiere mucho de la primera. Si nos fijamos en la primera, ya que en el juego se supone que debemos mover, realizar el turno y luego volver a lanzar los dados, podemos tener una idea de la probabilidad de cada número. Esto nos permite, viendo la casilla en la que se encuentran los demás jugadores, decidir en qué propiedad debemos edificar, ya que si un jugador se encuentra a seis, siete u ocho casillas de nuestra propiedad, es bastante probable que saque uno de estos tres números y caiga en ella. De la misma forma nos puede servir para ahorrar dinero si vemos que nosotros tenemos altas probabilidades de caer en una casilla de otro jugador que se encuentre a esa misma distancia. Sin embargo, no se cae en todas las casillas de forma homogénea ya que en el juego existen objetos o casillas que hacen que esto varíe, tales como las tarjetas de suerte y caja de comunidad, y la casilla de la cárcel.

En el juego, la casilla más visitada es la de la cárcel, dado que hay diversas maneras de terminar en ella. Una puede ser de visita, cayendo en la propia casilla siguiendo el juego normal, cayendo en la casilla opuesta, que te envía directamente a la cárcel, sacando tres dobles seguidos o sacando una de las dos tarjetas de *ve directamente a la cárcel* que se encuentran entre las tarjetas de suerte y caja de la comunidad. Debido a esto, las casillas que se encuentran a la salida de la cárcel son más probables de ser visitadas y las que se encuentran justo antes de la cárcel las menos visitadas. Además de este dato, hay que tener en cuenta que algunas tarjetas, 10 de las 16 del mazo de suerte, te llevan a otra casilla del tablero. Entre ellas, tenemos las tarjetas que nos envían a la cárcel y a la casilla de salida, dos que nos envían a la estación más cercana, haciendo que paguemos el doble del alquiler que marca la propiedad, una que nos lleva a la propiedad más próxima y nos hace pagar 10 veces la cantidad que marquen los dados o las que nos llevan a una casilla determinada. Estas últimas, nos llevan a las casillas estación de Goya, glorieta de Bilbao, calle Cea Bermúdez y al Paseo del Prado. Las tarjetas de la caja de la comunidad solo nos llevan a la cárcel o a la casilla de salida, su principal función es darnos o quitarnos dinero.

Por lo tanto, si tenemos en cuenta la probabilidad de obtener cada número, junto con la casilla más visitada en el juego, podemos llegar a la conclusión de que las casillas que se encuentran a partir de la cárcel son las más visitadas del juego. Bill Butler ha desarrollado un modelo [1] que, mediante cálculos con el ordenador, calcula la probabilidad de caer en cada una de las casillas. Para ello, el algoritmo utiliza un árbol de búsqueda [2]. Para cada espacio del tablero, realiza una búsqueda en el árbol de todos los posibles movimientos, incluyendo todas las variables ya comentadas como sacar dobles, ir a la cárcel, etc. Para cada ruta posible desde un punto a otro del tablero, calcula la probabilidad de esa ruta en particular. Dado que existen muchas combinaciones diferentes que comienzan en un punto del tablero y terminan en otro, o incluso en el mismo, el algoritmo forma totales acumulativos. El resultado de este proceso será una matriz de transición de un paso, de un punto del tablero a otro punto, que muestra la probabilidad de comenzar el turno en cualquiera de las casillas del tablero, terminando el turno en cualquier casilla del tablero. Esta matriz de transición forma una cadena de Markov, una vez que se resuelva esta cadena, se obtendrá la probabilidad de estado estable de estar en cada posible estado. En el juego Monopoly, esta es la probabilidad de que tu ficha del juego esté en una casilla en particular al final del turno.

Por último, para cada punto del tablero, en este caso serán los estados de la cadena de Markov, el algoritmo ejecuta otra vez el árbol de búsqueda. Para cada casilla que se visite, calcula la probabilidad de la ruta de visita y añade esa cantidad a los totales acumulados que mantiene para todos los espacios del tablero.

Utilizando la tecnología de los ordenadores para implementar este algoritmo, que de otro modo sería de gran extensión, Bill Butler ha conseguido obtener la probabilidad de cada una de las casillas teniendo en cuenta todas las variables del juego. Dichas probabilidades quedan recogidas en la siguiente imagen, proporcionadas por ING Direct [14].

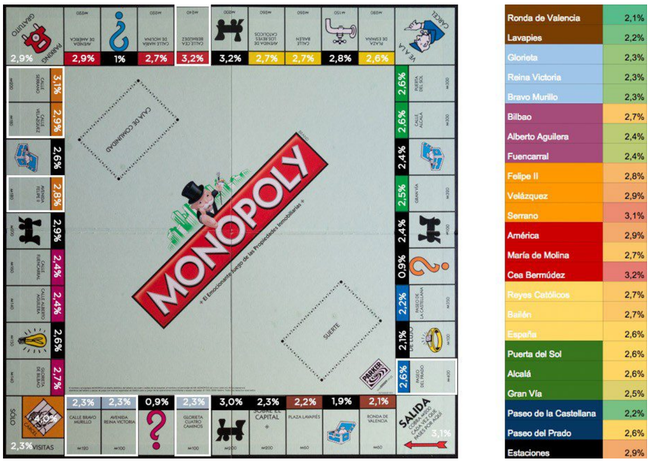


Figura 1.3: Casillas en las que se cae más veces en una partida

Como podemos ver en la imagen, la casilla en la que más se cae es en la calle Cea Bermúdez, seguida de la calle Serrano. También, como ya hemos comentado anteriormente, las casillas que se encuentran después de la cárcel, tienen más probabilidades que las que se encuentran antes de la casilla de la cárcel.

Aunque estas casillas son las más visitadas durante la partida, hay otras casillas que, aunque no sean de las más visitadas, son casillas que son rentables debido a que el precio de compra y el precio de edificación son bajos, por lo que no se necesita mucho dinero para construir en ellas. Por lo tanto, aunque no se caiga muchas veces, al haber invertido poco dinero para la compra de la propiedad y la construcción de los edificios, se recupera gran parte del dinero perdido. También debemos mencionar las propiedades de color azul claro. Estas propiedades son muy caras a la hora de comprarlas y de edificar en ellas, pero, debido al alto precio que se cobra de alquiler, hace que estas propiedades sean de las más rentables de todo el juego. En la página web de ING direct, podemos encontrar unas tablas que nos muestra la rentabilidad de cada casilla independientemente de las probabilidades de caer, y otra tabla con la rentabilidad de cada casilla dependiendo de la probabilidad de caer en ellas, teniendo en cuenta el precio pagado por la propiedad, el precio de las casas y hoteles y el dinero que se ganan con ellos.

Podemos concluir que la mejor estrategia a seguir para ganar el juego es saber qué propiedades merece la pena comprar y no gastar el dinero en propiedades que no nos vayan a aportar nada de dinero, ya que ese dinero lo podríamos emplear en comprar otras propiedades más rentables. En este caso, las propiedades de color azul claro y las propiedades naranjas serían las mejores opciones de comprar para arruinar al resto de jugadores.

[2]Un **árbol de búsqueda** es una estructura de datos de tipo árbol utilizado para localizar llaves concretas, contenidas en cada nodo del árbol, dentro de un conjunto.

Este juego puede ser algo más complicado de proponerlo en una clase debido a que se estudian conceptos que requieren un nivel más alto de matemáticas que para el Can't Stop, además, para calcular la solución final hay que hacer uso de los ordenadores y el juego es demasiado largo como para jugar durante una clase. Aunque podría darse como un ejemplo para el estudio de procesos estocásticos. Pasaremos ahora a estudiar el juego *Sagrada*, un juego donde hay un amplio abanico de posibilidades que se pueden estudiar.

1.4. Sagrada

En este juego, a diferencia de los dos anteriores, no se juega solo con los números de los dados, sino que añadimos colores a los dados, además de una serie de restricciones que hacen inviable definir una estrategia para ganar.

El juego consiste en obtener la mayor puntuación posible, rellenando un patrón de una tarjeta con dados de colores. En el juego hay 18 dados de 5 colores diferentes, por lo que en total hay 90 dados. Para conseguir los puntos que determinan la puntuación final, se utilizan unas tarjetas de objetivo, teniendo, durante cada partida, 3 objetivos públicos, los cuales pueden ver todos los jugadores y uno privado para cada jugador. A la hora de colocar los dados existen una serie de restricciones, lo que hace que el juego sea complicado de estudiar matemáticamente.

Figura 1.4: Elementos que componen el juego

Las restricciones que hacen que este juego sea más complicado son las siguientes. Como se puede apreciar en la siguiente imagen, cada tarjeta de objetivo dispone de diferentes casillas. Unas son de color blanco, otras tienen un determinado color y otras un determinado número, nunca habrá una casilla con un número y color a la vez. En las casillas blancas se puede poner cualquier dado con cualquier valor, mientras que en las casillas en las que aparezca un color o un valor determinado, solo se podrá colocar un dado que cumpla esa condición. Es decir, si una casilla es de color rojo, solo se podrá colocar un dado rojo, independientemente del valor. Además de esto, a la hora de colocar los dados existen otra serie de restricciones. El primer dado que se juega, solo se puede colocar en el borde del vitral. Una vez colocado este dado, los siguientes dados tienen que ser colocados en ortogonal o diagonal a un dado puesto, es decir, no se puede colocar un dado en una esquina y el siguiente dado en otra esquina, siempre se deben colocar los dados en las casillas adyacentes a las que ya haya un dado.

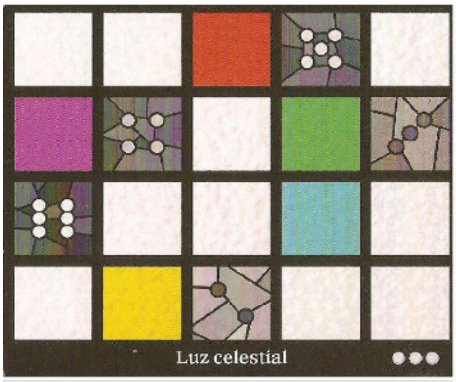
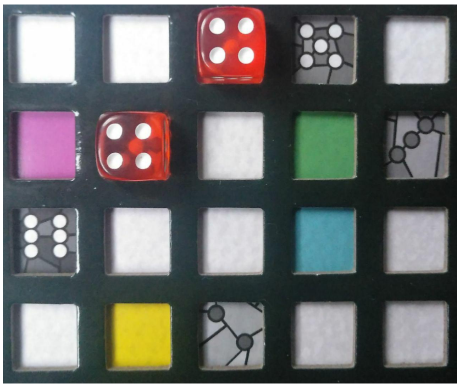
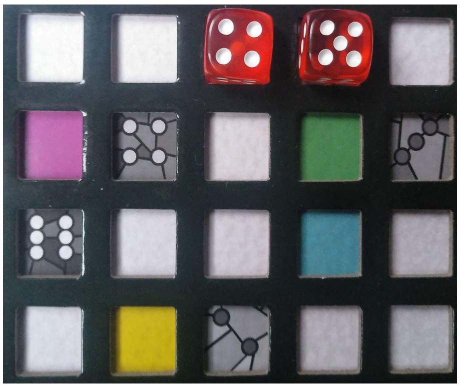


Figura 1.5: Ejemplo de una tarjeta de dificultad 3

A la hora de colocar los siguientes dados, en ningún caso se pueden colocar dados adyacentes en ortogonal si tienen el mismo color o el mismo valor, pero si se puede en su diagonal. Por ejemplo, dos dados rojos o dos dados con el valor 4 no pueden compartir ninguno de sus lados. En la siguiente imagen podemos ver dos colocaciones de dados del mismo color y cumpliendo las condiciones de color y número impuestas en la tarjeta mostrada en 1.5. En la imagen de la izquierda tenemos la colocación correcta ya que la tarjeta nos pedía un dado rojo en el borde y un dado con valor 4 en su diagonal. Por otro lado, en la imagen de la derecha tenemos un ejemplo de una colocación incorrecta. Aunque el valor de los dados es distinto, como hemos explicado antes, no podemos tener dos dados del mismo color juntos, por lo que los dos dados rojos no pueden estar juntos.





Aparte de las condiciones de colocación ya explicadas, el número de dados que se extraen de la bolsa depende del número de jugadores. Si n es el número de jugadores, se sacarán $2n+1$ dados, ya que durante su turno, cada jugador podrá elegir dos dados. Durante cada turno, el primer jugador elegirá uno de los dados de la reserva, después el siguiente jugador en el sentido de las agujas del reloj elegirá un dado, cuando todos hayan cogido un dado, el último jugador volverá a coger un dado y la ronda volverá en sentido antihorario hasta que el primer jugador sea el último en coger otro dado. Después pasará la bolsa con los dados al siguiente jugador, quien ahora será el primer jugador y se repetirá el mismo formato de ronda. Así el primer jugador solo tiene ventaja en elegir el primer dado, haciendo que, por ejemplo, en el caso de tener solo dos dados posibles para colocar, sea más difícil que pueda colocar ambos dados.

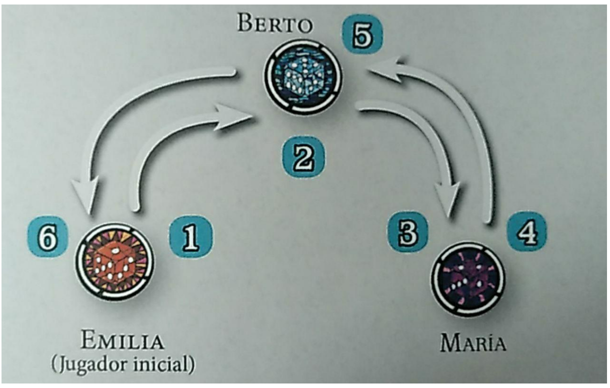
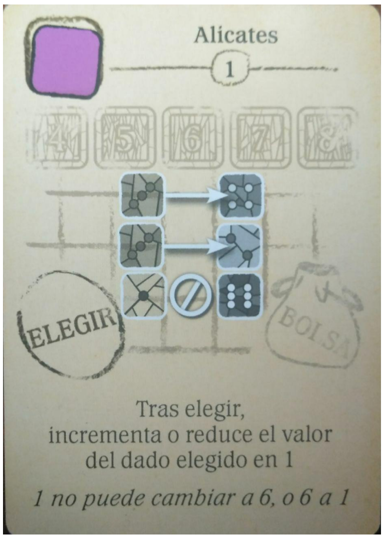


Figura 1.6: Orden de colocación de los dados

Además de lo dicho anteriormente, no gana el jugador que primero completa el vitral, ya que todos los jugadores lo acaban rellenando al final de los 10 turnos, sino que para ganar hay que contar los puntos que ha obtenido cada jugador. Para ello se utilizan las tarjetas de objetivo público y privados. Los objetivos privados puntúan en función de los colores y los valores de los dados que haya en el vitral. Es decir, si por ejemplo un jugador tiene como objetivo privado el color rojo, al final de la partida tendrá tantos puntos como la suma de todos los valores de los dados rojos. Por otro lado, los objetivos públicos son más variados. Dan entre 2 y 5 puntos por cumplir cada uno de ellos. Si un objetivo que vale 4 puntos se completa 3 veces, el jugador obtendrá 12 puntos de ese objetivo. Entre los objetivos se encuentran unos de formar filas o columnas de diferentes valores o colores, parejas de valores o diagonales de colores. Todo esto hace que intentar desarrollar una estrategia que nos permita ganar la partida sea más complicado que en los juegos que ya hemos estudiado. Ya solo en el comienzo del juego puede haber muchas variantes. Dado que solo podemos empezar en el borde del vitral y que el siguiente dado lo tenemos que colocar ortogonal o diagonalmente al ya colocado, es claro que debemos intentar no colocar el primer dado en ninguna de las esquinas. Si colocamos el primer dado en una esquina, solo tendremos 3 posibles casillas donde colocar el siguiente dado mientras que, si colocamos el primer dado en una casilla que no sea una esquina, para el siguiente dado tendremos 5 posibles casillas donde colocarlo, lo que hará que tengamos más probabilidades de poder colocar el siguiente dado.

Asimismo, en el juego existen unas cartas de herramientas. Estas cartas se pueden usar utilizando fichas de donativo, que son dadas a cada jugador en función de la dificultad de la tarjeta elegida, si la tarjeta tiene dificultad 3, el jugador recibirá 3 fichas de donativo. Para usar la tarjeta, se deberá pagar una ficha de donativo si la tarjeta no ha sido usada y dos fichas en el caso en el que la tarjeta ya haya sido usada. Estas tarjetas se pueden utilizar a lo largo de la partida y permiten hacer cambios en los dados que han salido de la bolsa como por ejemplo sumar 1 al valor de un dado, cambiar el valor del dado, etc. El juego está compuesto por 12 de estas tarjetas y durante cada partida se ponen en la mesa 3, lo que también deja al azar qué tarjetas se usarán durante cada partida.



Además, para cada tarjeta de vitral, de las cuales hay 24, se tendría que calcular la probabilidad de que te salgan ciertos colores junto con un determinado número y que, el jugador sobre el que se está realizando el estudio, sea capaz de colocar el dado. Esto es, si el jugador sobre el que estamos realizando el estudio no es quien elige primero, en el caso de que solo pueda colocar uno de los dados de la reserva en su vitral y otro jugador elija ese dado, el jugador estudiado ya no podrá colocar ningún dado en el vitral. Por lo que también se tendría que tener en cuenta el orden en el que se eligen los dados. Así como la probabilidad de tener al menos tres posibles dados para poder colocar, siempre que jueguen solo dos jugadores, los dos dados correspondientes a cada turno. Calcular todos estos eventos, así como sus respectivas probabilidades teniendo en cuenta todas las restricciones, sería una gran tarea que no se va a realizar en este trabajo.

En su lugar, estudiaremos algunos casos concretos y daremos algunos ejemplos de problemas más complicados. Una pregunta que nos podría surgir a la hora de colocar los dados es la siguiente. Si nos encontraramos en el caso de poder colocar un dado en dos casillas, dónde es más conveniente colocarlo. Es decir, dado que las casillas de valor y de color son las que nos obligan a colocar un determinado dado, si tenemos en la reserva un 5 morado y podemos colocarlo en una casilla morada o en una casilla con restricción de valor 5, ¿dónde nos conviene más colocarlo? Esto lo podemos resolver sencillamente aplicando la **regla de Laplace** 1.5.

Es sencillo comprobar que, suponiendo que todos los dados vuelven a la bolsa una vez han sido lanzados, es conveniente colocar el dado en la casilla con restricción de valor, ya que la probabilidad de obtener un 5 es menor que la probabilidad de obtener un dado morado.

$$P(\text{Morado}) = \frac{18}{90} = 0{,}2 \sim 20\,\%$$

$$P(5) = \frac{1}{6} = 1.\hat{6} \sim 16{,}67\,\%$$

Si por el contrario seguimos las reglas del juego, tenemos que tener en cuenta que los casos favorables a sacar un dado morado irán descendiendo según descienda el número de dados morados restantes. Si estudiamos la probabilidad de sacar dados morados según el número de dados morados que queden en la bolsa, obtenemos lo siguiente:

$$P(M) = \frac{17}{90} = 0{,}1\hat{8} \sim 18{,}89\,\%$$

$$P(M) = \frac{16}{90} = 0{,}1\hat{7} \sim 17{,}78\,\%$$

$$P(M) = \frac{15}{90} = 0{,}1\hat{6} \sim 16{,}67\,\%$$

Como podemos observar, una vez que solo quedan 15 dados morados en la bolsa, la probabilidad de obtener un dado morado, coincide con la probabilidad de obtener un 5, por lo que una vez que pasemos de 15 dados morados, la probabilidad será aún menor y será mejor elegir el dado con la restricción de color en vez de la restricción de valor.

Una vez se comenzaron a estudiar las posibles direcciones del trabajo para este juego en cuanto a estudiar probabilidades, se notó que el juego presenta una gran variedad de problemas de diferente dificultad. Si se siguieran estrictamente las reglas del juego, se pueden llegar a complicar los eventos ya que hay que tener en cuenta muchos factores a la hora de la colocación de los dados, así como el gran número de dados y colores. Con este juego se podrían crear problemas más complejos que los que se dan normalmente en las clases de estadística, en los que se suelen utilizar espacios muestrales muy reducidos o con pocos eventos que estudiar. Por todo esto, no haremos un análisis más a fondo de este juego ya que queremos ver más tipos de juegos de mesa que ya han sido estudiados.

Por ejemplo, se podría estudiar de una determina tarjeta y para el caso de dos jugadores, la probabilidad de poder colocar el primer dado en una casilla de color y el segundo dado adyacente al primero, siempre teniendo solo en cuenta los colores, ya que si tenemos en cuenta también los valores de los dados las probabilidades serán más complejas. Como hay 2 jugadores, el número de dados en la reserva será 5. Veremos los eventos, así como la probabilidad de algunos, que se deben dar para poder colocar esos dos dados.

Elegimos la tarjeta ”Luz celestial”, mostrada en la imagen 1.5. En esta tarjeta las únicas restricciones de color que encontramos en el borde son de tres colores, morado, rojo y amarillo. Por lo que para poder colocar un primer dado, necesitaremos tener mínimo un dado morado, un dado rojo o un dado amarillo.

Para el color morado tenemos $\{5M - 4M - 3M - 2M\}$, siendo el resto de los dados de cualquier color, dado que podremos colocarlos en su diagonal debido a que hay una casilla en blanco. Habiendo mínimo 2 dados, aunque el primer jugador eligiera un dado morado, el segundo jugador aún tendrá otro dado morado para poder colocarlo en su vitral y a partir de ahí colocar un segundo dado. Lo mismo ocurre con los eventos para el color amarillo ya que ambos colores disponen de una casilla blanca en su diagonal. Por otro lado, el color rojo tiene una restricción de color en su diagonal.

Volviendo al caso de los dados morados o amarillos, si solo sale un dado morado, al menos se necesitará un dado amarillo o rojo, ya que el primer jugador puede elegir el dado morado, por lo que para que el segundo jugador pueda colocar un dado en el borde del vitral, necesitará mínimo que haya una dado amarillo para poder colocarlo. Una vez que haya un dado amarillo o rojo, los demás dados pueden ser de cualquier color. Lo mismo ocurre para los demás colores del borde del vitral. Identificaremos los colores por su inicial, en el caso del color azul, lo diferenciaremos del amarillo llamándolo Az.

$$\begin{tikzcd} & 1A/R \\ 1M \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & 2A/R \\ & 3A/R \\ & 4A/R \end{tikzcd}$$

Como ya hemos dicho, los colores morado y amarillo se pueden intercambiar para los cálculos, por lo que solo realizaremos los cálculos para el color morado. Empecemos por las probabilidades de sacar 5, 4, 3 y 2 dados morados. Para ello utilizaremos la regla de Laplace.

En el caso de los **5 dados morados**, solo tenemos un posible evento, en el que todos los dados sean del mismo color. Su probabilidad es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{17}{89}\cdot\frac{16}{88}\cdot\frac{15}{87}\cdot\frac{14}{86}=\frac{238}{1220813}\approx 0{,}000194...$$

Los posibles eventos que se dan para tener **4 dados morados** y uno cualquiera (llamado X) son $\{XMMMM, MXMMM, MMXMM, MMMXM, MMMMX\}$, por lo tanto tendremos 5 posibles eventos $\binom{5}{4}$. La probabilidad de que ocurra cada uno de ellos es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{18}{89}\cdot\frac{17}{88}\cdot\frac{16}{87}\cdot\frac{(90-18)}{86}=\frac{7344}{6104065}\approx 0{,}00120313...$$

Con **3 dados morados** debemos estudiar dos tipos de eventos por separado. En el caso en el que los 2 dados sobrantes sean del mismo color o que sean de colores diferentes. Primero calcularemos qué ocurre cuando los dos dados son del mismo color. Tendremos 10 posibles eventos, $\binom{5}{3}\binom{2}{2}$. La probabilidad de cada uno de ellos es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{17}{89}\cdot\frac{16}{88}\cdot\frac{(90-18)}{87}\cdot\frac{(90-19)}{86}=\frac{28968}{6104065}\approx 0{,}00474569...$$

Si los dos dados que sacamos son de colores distintos tendremos más eventos, ya que ahora tenemos $\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$, por lo tanto tenemos 20 posibles eventos. La probabilidad de cada uno de ellos será:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{17}{89}\cdot\frac{16}{88}\cdot\frac{(90-18)}{87}\cdot\frac{(90-36)}{86}=\frac{22032}{6104065}\approx 0{,}0036094...$$

En el caso de **2 dados morados**, también tenemos que diferenciar entre diferentes casos. El caso en el que los 3 dados sobrantes sean del mismo color, en el caso en el que solo 2 de ellos sean del mismo color y el caso en el que todos sean de distinto color.

Empezamos por el caso de que los 3 dados sean del mismo color. Los posibles eventos serán $\binom{5}{2}\binom{3}{3}$, por lo tanto tenemos 10 eventos. La probabilidad de cada uno de ellos es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{17}{89}\cdot\frac{(90-18)}{88}\cdot\frac{(90-19)}{87}\cdot\frac{(90-20)}{86}=\frac{25347}{6104065}\approx 0{,}0207624...$$

Si tenemos 2 dados del mismo color, es decir, 2 dados morados, 2 de otro color y 1 de un color distinto de los anteriores, tenemos $\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$, por lo que hay 30 eventos diferentes. La probabilidad de cada evento es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{17}{89}\cdot\frac{(90-18)}{88}\cdot\frac{(90-19)}{87}\cdot\frac{(90-36)}{86}=\frac{37767}{24416260}\approx 0{,}0160167...$$

Y, por último, si los dados que no son morados son de diferentes colores, el número de eventos será $\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$, por lo que tenemos 60 eventos diferentes, la probabilidad de cada uno de ellos es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{17}{89}\cdot\frac{(90-18)}{88}\cdot\frac{(90-36)}{87}\cdot\frac{(90-54)}{86}=\frac{49572}{12208130}\approx 0{,}00812115...$$

Lo mismo ocurriría con los dados amarillos, ya que las posibles combinaciones de los dados no cambiaría y por lo tanto, tampoco cambiarán las probabilidades de los eventos.

Comprobemos ahora qué ocurre cuando solo tenemos **un dado morado y al menos un dado amarillo**. Los posibles eventos serán, siendo X un color distinto de morado o amarillo, $\{1M1A3X, 1M2A2X, 1M3A1X, 1M4A\}$. Lo mismo ocurriría intercambiando el color morado por el amarillo. Comenzamos por el primer evento.

Como ocurría antes, debemos tener en cuenta si los 3 dados que no son ni morados ni amarillos, pueden ser los 3 del mismo color, 2 del mismo color y 1 de otro color, y los 3 de distinto color. Entendemos que estos colores serán distintos del amarillo o morado, ya que si alguno de estos 3 dados fuera de uno de esos colores, estaríamos en otro evento distinto. Empezamos por el primer evento, en el cual los 3 dados son del mismo color. Tenemos $\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{3}$, 20 posibles combinaciones. La probabilidad de cada una de ellas es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{18}{89}\cdot\frac{(90-36)}{88}\cdot\frac{(90-37)}{87}\cdot\frac{(90-38)}{86}=\frac{55809}{6104065}\approx 0{,}00914292...$$

En el caso en el que solo tengamos 2 dados del mismo color de los 3 dados, tendremos $\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$, 60 posibles combinaciones. La probabilidad de cada una de ellas es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{18}{89}\cdot\frac{(90-36)}{88}\cdot\frac{(90-37)}{87}\cdot\frac{(90-54)}{86}=\frac{38637}{12208130}\approx 0{,}00632972...$$

Por último, el caso en el que los 3 dados son de distinto color coincide con el caso en el que todos los dados son de distinto color, tenemos $\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}$ combinaciones, es decir, 120 combinaciones. La probabilidad de cada una de ellas será:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{18}{89}\cdot\frac{(90-36)}{88}\cdot\frac{(90-54)}{87}\cdot\frac{(90-72)}{86}=\frac{13122}{6104065}\approx 0{,}00214971...$$

Estudiamos ahora el caso en el que tenemos **un dado morado y al menos dos amarillos**. Se puede dar el caso en el que los dados que faltan para llegar a los 5 sean del mismo color o que sean de colores diferentes. Empezamos por el caso en el que ambos dados son del mismo color. Tendremos $\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$, 30 posibles combinaciones. La probabilidad de cada una de ellas es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{18}{89}\cdot\frac{17}{88}\cdot\frac{(90-36)}{87}\cdot\frac{(90-37)}{86}=\frac{72981}{24416260}\approx 0{,}00298903...$$

El caso en el que los dos dados sobrantes sean de distinto color, tendremos $\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$, 60 posibles combinaciones.

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{18}{89}\cdot\frac{17}{88}\cdot\frac{(90-36)}{87}\cdot\frac{(90-54)}{86}=\frac{12393}{6104065}\approx 0{,}00203029...$$

El siguiente evento que estudiaremos es en el que tenemos 1 dado morado y al menos 3 amarillos. Como solo nos queda un dado por elegir, este evento tendrá $\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$, por lo tanto tenemos 20 posibles eventos. La probabilidad de cada uno de ellos será:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{18}{89}\cdot\frac{17}{88}\cdot\frac{16}{87}\cdot\frac{(90-36)}{86}=\frac{5508}{6104065}\approx 0{,}000902349...$$

Por último, para el evento en el que tenemos **1 dado morado y 4 amarillos**, tendremos los eventos $\{AMMMM, MAMMM, MMAMM, MMMAM, MMMMA\}$, por lo tanto tendremos 5 posibles eventos $\binom{5}{4}$. La probabilidad de que ocurra cada uno de ellos es:

$$\frac{18}{90}\cdot\frac{17}{89}\cdot\frac{16}{88}\cdot\frac{15}{87}\cdot\frac{18}{86}=\frac{1836}{6104065}\approx 0{,}000300783...$$

Podemos hacer el mismo estudio con el dado rojo y con esto tendríamos la probabilidad de poder comenzar en una restricción de color y colocar el siguiente dado, teniendo solo en cuenta el color. Si hubiéramos tenido en cuenta también el valor de los dados, tendríamos que tener en cuenta que dos dados del mismo valor no se pueden colocar ortogonalmente.

Supongamos que estamos en el caso de tener 5 dados morados, dado que no podemos colocar dos dados ortogonales con el mismo número, los dados morados con el valor 4 y 6 no podremos colocarlos en el vitral de la tarjeta 1.5, además, si nos fijamos en las diagonales, en una no podremos colocar dados con valor 4 o 6, mientras que en la otra no podremos colocar un dado con valor 4. Esto nos obliga, en el caso de tener todos los dados morados, a tener mínimo tres dados con valor distinto de 4 para poder colocar 2. Además, dos de esos tres dados deben ser también distinto de 6. Como en este caso estamos ante eventos independientes ya que sacar un dado morado no influye en el valor del dado, podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.10. *Diremos que dos sucesos son* ***independientes*** *cuando la ocurrencia del primero no cambia la probabilidad de que ocurra el segundo.*

$$P(B|A) = P(B), \text{ o bien } P(A|B) = P(A)$$

Esto es equivalente a decir que, dos sucesos son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Luego, en el caso de obtener 5 dados morados tendremos que ver la probabilidad de obtener al menos 2 dados con valor 4, 2 dados con valor 6 y un dado con cualquier valor. Por lo tanto, la probabilidad de obtener esta combinación será:

$$\frac{1}{1296}\left(\frac{18}{90}\cdot\frac{17}{89}\cdot\frac{16}{88}\cdot\frac{15}{87}\cdot\frac{14}{86}\right) = \frac{238}{1582173648} \approx 6{,}32042 \times 10^{-10}$$

Hacer este mismo estudio para cada una de las posibles combinaciones que nos encontramos en el juego puede resultar largo. Además, esto solo hace referencia a la primera ronda. Por lo que para las siguientes rondas habrá que tener en cuenta la colocación de los dados, así como el número de dados que se encuentran en la bolsa. Dado que existen muchas más formas de comenzar a llenar el vitral que no son empezando en una restricción de color, intentar estudiar todas y cada una de ellas se hace prácticamente imposible.

Con este juego hemos podido comprobar que, aunque sigue siendo un juego de dados y la probabilidad de obtener un número determinado no cambia, el estudio del mismo se puede complicar. Este juego se puede jugar durante una clase y permitir que los alumnos desarrollen los posibles casos que se podrían estudiar utilizando probabilidades. Por último, haremos una mención especial al juego Catan, un juego que se puede utilizar durante una clase para estudiar ejemplos de probabilidad.

1.5. Catan

Aunque no se estudiará a fondo este juego, debemos hacer una mención especial a Catan, donde los dados desempeñan un papel muy importante en el comienzo del juego. Este juego consiste en la creación de pueblos y ciudades, para los cuales serán necesarios unos determinados materiales. Cada carretera, pueblo o ciudad construidos otorgaran un número de puntos a cada jugador, el jugador que alcance antes los 10 puntos, será el ganador. Para poder construir, será necesario tener cartas de materiales. Estos materiales se consiguen de la isla, el tablero en el que tiene lugar el juego. La isla está dividida en hexágonos, cada hexágono produce un tipo diferente de material y tiene un número diferente asignado. Durante su turno, cada jugador tira dos dados, el número que salga será de la casilla de que se obtendrán los materiales. Solo obtendrán materiales aquellos jugadores que posean un pueblo o una ciudad en uno de los vértices del hexágono.

Figura 1.7: Tablero Catan

Ya hemos visto la probabilidad de los diferentes números utilizando dos dados, por lo que, si tenemos en cuenta cuales son los números que aparecen más frecuencia, se podría determinar una estrategia a la hora de colocar los diferentes asentamientos. Además, debemos tener en cuenta que el número 7 representa al ladrón. Es decir, cada vez que se obtiene un 7, el ladrón se activa, por lo que ninguna casilla produce recursos. Además, todos los jugadores que tengan más de 7 cartas de materias primas, deberán descartarse de la mitad, en el caso de tener un número impar, se redondea hacia abajo.

Con esto terminamos el capítulo de juegos con dados, como hemos visto en este capítulo, algunos juegos de mesa nos ofrecen un amplio abanico de posibilidades para estudiar conceptos matemáticos relacionados con la estadística, en especial con la probabilidad. Pasaremos ahora a estudiar otros conceptos matemáticos que podemos encontrar en juegos de mesa.

Capítulo 2

Otros conceptos matemáticos en juegos de mesa

2.1. Introducción

Después de ver cómo podemos emplear las matemáticas en los juegos en los que se utilizan principalmente dados, en este capítulo veremos otras formas con las que se pueden estudiar matemáticamente algunos juegos de mesa. En este capítulo se estudiarán conceptos un poco más complicados que los ya estudiados durante el primer capítulo.

2.2. Dobble

Este es un juego de reflejos que consiste en ser el primero en encontrar la figura que coincide entre dos tarjetas diferentes, obteniendo así las dos tarjetas. El jugador que más tarjetas acumule, será el ganador. Aunque existen varios minijuegos distintos utilizando las mismas tarjetas, nos quedaremos con el dato de que entre dos tarjetas, siempre coincide una y solo una figura. En total hay 55 cartas, cada una con 8 símbolos, y un total de 57 símbolos repartidos entre ellas.

Figura 2.1: Juego Dobble

Este juego tiene una peculiaridad que a simple vista puede pasar desapercibida [3]. Este juego nos ayuda a explicar algunos conceptos de la geometría proyectiva. Para ello, primeramente daremos algunas definiciones del libro [8] que nos servirán más adelante.

Definición 2.1. *Un **plano proyectivo** es un conjunto,* $\Pi = (P, L, I)$*, no vacío formado por un conjunto* P *de puntos, un conjuntos de rectas* L *por las que pasan dichos puntos y* $I \subset P \times L$ *la relación de incidencia* [1]*, que satisface los siguientes axiomas.*

1. *Dados dos puntos* Q *y* R *distintos de* P*, existe una única recta que contiene a ambos puntos.*
2. *Todo par de rectas se cortan en un único punto.*
3. *Existen tres puntos distintos no colineales* [2]*.*

[1] Los puntos de P se encuentran en alguna de las rectas de L.
[2] Todo conjunto de puntos que incide con una misma recta, se llaman puntos colineales.

4. Toda recta tiene, al menos, tres puntos.

Definición 2.2. *Decimos que el* ***orden*** *de un plano proyectivo* Π *es* n *si y solo si cada recta es incidente con* $n+1$ *puntos.*

Viendo las reglas del juego tenemos que en cada tarjeta hay 8 símbolos diferentes y entre dos tarjetas solo coincide uno y solo un símbolo, luego podemos reescribir los principios anteriores adecuándolos al juego. Así tendremos que los puntos serán los símbolos y las rectas las tarjetas ya que, como ya hemos visto en las reglas, todo par de tarjetas solo tiene un único símbolo en común, que lo podemos identificar como, todo par de rectas, tarjetas, se cortan en un único punto, un único símbolo.

Tomando un número finito de símbolos tendremos a su vez un número finito de tarjetas. Veamos qué ocurre para dos símbolos. Si tenemos dos símbolos, es decir, dos puntos, podemos tomar el 0 y el 1 teniendo el conjunto $\{0, 1\}$. Multiplicamos como siempre

- $0 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 1 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1$

y para la suma hacemos

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 1 = 0$

Por lo que tenemos 4 puntos $\{[0, 0]; [0, 1]; [1, 0]; [1, 1]\}$. Con estos 4 puntos podemos formar 6 rectas diferentes utilizando la ecuación de la recta [3].

- x=0; x=1
- y=0; y=1
- x=y; x=y+1

Como cada recta tiene dos puntos distintos, nos encontramos en un plano afín finito. Siendo más específicos, dado que hemos elegido solo 2 elementos, decimos que es un plano afín finito de orden 2. Se pueden construir planos finitos de mayor orden, siendo el orden potencia de algún primo, pero para poder estudiar este juego, debemos estar en el plano proyectivo finito. El plano proyectivo tiene dos propiedades comentadas anteriormente como los principios que se dan en la geometría proyectiva. Como se puede notar, nuestro plano no cumple uno de los principios. Cada recta esta formada por 2 puntos, pero estas rectas no se cortan en ningún punto, por lo tanto, debemos inventar una recta donde se corten estas rectas. Esta recta tendrá 3 puntos, uno en el que se cortarán las rectas verticales, otro donde se cortarán las horizontales y por último uno donde se cortarán las oblicuas.

De esta forma, tendremos un plano proyectivo finito formado por 7 rectas, 7 puntos, y cada par de rectas se corta en un único punto. Este plano proyectivo de orden 2 es el conocido plano de Fano. Se puede dibujar de la siguiente forma:

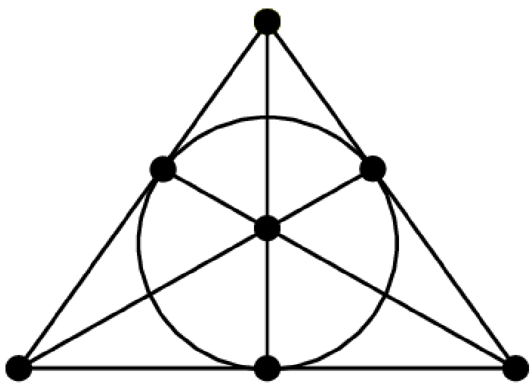


Figura 2.2: Plano de Fano

[3] Ecuación de la recta: $y = ax + b$

Si podemos construir un plano proyectivo finito con orden 2, sería normal preguntarnos cuáles son los posibles órdenes que pueden tener estos planos. El siguiente teorema tiene relación con esta pregunta.

Teorema 2.1. *Si en un plano proyectivo* Π *existe una recta que es incidente con* $n+1$ *puntos, entonces:*

- *Toda línea de* Π *es incidente con* $n+1$ *puntos.*
- *Todo punto de* Π *es incidente con* $n+1$ *rectas.*
- Π *contiene* n^2+n+1 *puntos y el mismo número de rectas.*

Demostración. Denotemos por r la recta que contiene $n+1$ puntos y los puntos como $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$. Si Q es un punto que no se encuentra en r, por el primer axioma de la definición 2.1, podemos tomar las rectas QP_i, con $i = 1, 2, \cdots, n+1$. Estas rectas son distintas entre sí, dado que $Q \notin r$. Por otro lado, por el axioma 2, como cada par de rectas se cortan en un único punto, toda recta formada por Q se corta con r en un único punto. Este punto debe ser el punto P_i, con el que se haya formado la recta QP_i, luego hay exactamente $n+1$ rectas que pasen por Q. Por lo tanto, podemos ver que si, existe un punto E que es incidente con $n+1$ rectas, entonces toda recta que no pase por E, es incidente con $n+1$ puntos.

Si s es una recta cualquiera diferente de r, entonces, por el axioma 4, existe al menos una recta, diferentes de r y s, que contiene al punto donde se cortan r y s. Por el axioma 3, esta recta contiene un punto $R \neq r \bigcap s$. Como $R \notin r$, entonces pasan exactamente $n+1$ rectas por R. Como $R \notin s$, entonces la recta f es incidente con $n+1$ puntos. Con esto probamos la primera parte de la afirmación. Ahora, si P es un punto cualquiera del plano proyectivo, entonces, por los axiomas 3 y 4, existe una recta que no pasa por P. Por lo que ya hemos probado, esta recta será incidente con $n+1$ puntos, por lo tanto, el numero de rectas que pasan por P es $n+1$.

El número total de puntos del plano proyectivo se puede obtener contando el número de puntos que se encuentran en las rectas que pasan por P. El número de rectas que pasan por P es $n+1$, y cada una de estas rectas, contiene n puntos diferentes de P. Por lo tanto el número total de puntos será $1+(n+1)n = n^2+n+1$. Repitiendo este argumento, podemos obtener también que el número de rectas es n^2+n+1. □

Con esto, podemos dar otro teorema acerca de la construcción de planos proyectivos finitos.

Teorema 2.2. *Si el orden del plano* n *es un número primo, entonces podemos afirmar que existe un plano proyectivo finito.*

Este teorema ha sido probado por Ferenc Kárteszi (1907–1989) [4].

Si recordamos el número de símbolos que hay en el juego, podremos decir que tenemos 57 puntos en el plano, por lo que, según el teorema 2.1, nos encontramos en un plano de orden $n = 7$. Por el teorema 2.2, podemos afirmar que estamos en un plano proyectivo finito de orden 7. Si volvemos a aplicar el 2.1, podemos ver que el número de rectas el plano $n = 7$ es 57, esto nos hace pensar que el juego tendrá 57 tarjetas para jugar pero, si volvemos otra vez a las reglas, el juego que venden solo dispone de 55 tarjetas, por lo que matemáticamente, podrían existir dos tarjetas más. Si mostramos este juego durante una clase para explicar como funciona un plano proyectivo finito, podríamos plantear a los alumnos encontrar las dos tarjetas que faltan, además de dar una descripción sencilla y muy visual del plano proyectivo.

2.3. Set

En este juego estudiaremos nociones relacionadas con espacios vectoriales, por lo que lo primero daremos una definición de espacio vectorial.

Definición 2.3. *Un espacio vectorial es una terna* $(V, +, \cdot)$*, donde* V *es un conjunto no vacío y* $+, \cdot$ *son dos operaciones del tipo* $+ : V \times V \to \mathbb{R}$*,* $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ *a las que llamaremos* ***suma de vectores*** *y* ***producto*** *por escalares respectivamente y con las siguientes propiedades:*

1. *Propiedad asociativa:* $u + (v + w) = (u + v) + w$*,* $\forall u, v, w \in V$*.*

2. *Propiedad conmutativa:* $u + v = v + u$*,* $\forall u, v \in V$*.*

3. *Elemento neutro:* $\exists e \in V$ *tal que* $e + v = v + e = v$*,* $\forall v \in V$*.*

4. *Elemento opuesto: Para cada* $v \in V$ *existe* w *tal que* $v + w = w + v = e$*.*

5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$*,* $\forall v \in V$*,* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*

6. *Propiedad distributiva:* $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *y* $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$*,* $\forall u, v \in V$ *y* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*

7. $1 \cdot v = v$*,* $\forall v \in V$*.*

Diremos que V es un espacio vectorial y a los elementos de V los llamaremos **vectores**.

Al igual que *Dobble*, este es otro juego de rapidez visual utilizando tarjetas, cada una de las cuales consta de un diseño sobre fondo blanco. Este diseño está determinado por cuatro características [4]

- Símbolos: Pudiendo ser óvalos, ondas o rombos.
- Colores: Los símbolos son rojos, verdes o lilas.
- Número: Cada carta contiene uno, dos o tres símbolos.
- Fondo: Los símbolos son sólidos, rayados o sin fondo.

Como las cartas combinan estas características, en total tenemos $3^4 = 81$ cartas diferentes para jugar. El juego consiste en ser el jugador que más SET consiga. Para obtener un SET, un jugador debe encontrar 3 cartas en las que cada una de las 4 características sea igual o diferente en todas ellas de entre las 12 que se colocan en la mesa. En el caso de que ningún jugador fuera capaz de encontrar un set con esas 12 cartas, se añadirían otras 3 cartas más.

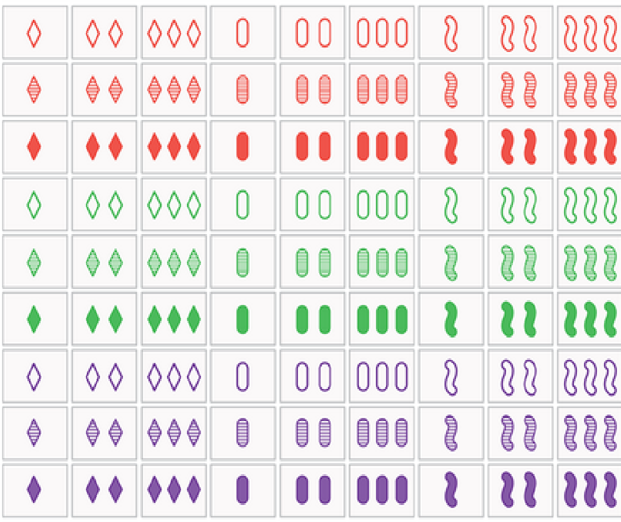
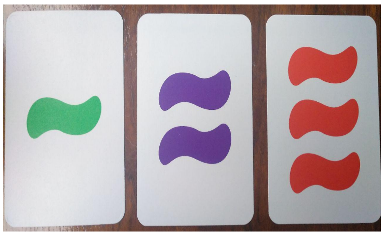
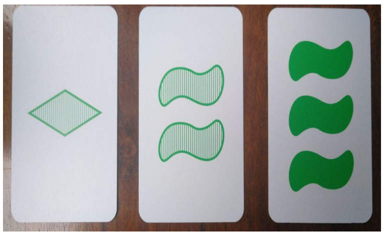


Figura 2.3: Cartas que componen el mazo del juego Set

Para entender mejor cómo se forma un set, veamos las siguientes imágenes. En una tenemos un set formado correctamente, mientras que en la otra tenemos un set que no ha sido formado correctamente. ¿Podríamos decir cuál es cuál?

[4]Reglas cogidas de la página oficial de Devir [15]

Si nos paramos a mirar las imágenes y recordamos cuáles eran las condiciones para formar un SET, podemos ver claramente que la imagen de la izquierda forma un SET mientras que la de la derecha no.

En la imagen de la izquierda, las tres cartas son de distinto color y distinto número de símbolos, además, tienen el mismo fondo sólido y la misma forma. Dado que las tres cartas tienen cada característica igual o distinta en las tres cartas, tenemos un SET.

Por otro lado, si observamos la imagen de la derecha, las tres cartas tienen el mismo color y distinto número de símbolos pero, el fondo en dos de ellas es rayado mientras que en la última el fondo es sólido, por lo que no forman un SET. Además, dos cartas tienen la misma forma, ondas, mientras que la última tiene forma de rombo, por lo que las tres cartas no cumplen que tengan cada una de las cuatro características iguales o diferentes, luego no tenemos un SET.

Si tenemos dos cartas cualesquiera, siempre existe una tercera carta con la que formar un SET, esto es así ya que si las dos primeras cumplen o no una característica, siempre podemos encontrar otra que cumpla las mismas condiciones. Por ejemplo, si dos cartas tienen la misma forma, siempre existirá otra que tenga la misma forma, y si esas dos cartas tienen distintos colores, la tercera tendrá que tener el color que falta. Dado que siempre podemos formar un SET a partir de dos cartas dadas, podemos calcular cuántos SETs distintos se pueden formar con las 81 cartas que forman el mazo. Cada dos cartas determinan un SET, pero como cada SET lo debemos contar tres veces, una por cada pareja de cartas, el número de SETs que podemos formar es $\frac{\binom{81}{2}}{3} = \frac{81\cdot 80}{6} = 1080$.

Recordando las reglas del juego, sabemos que en el comienzo del juego se colocan 12 cartas sobre la mesa y, si no es posible formar un SET con esas cartas, se añadirán 3 cartas más. ¿Qué probabilidad hay de que no se pueda formar un SET con las 12 cartas? Esta pregunta la hace Raúl Ibáñez en la página web [16]. Para ello calcularemos primero cuántas posibles combinaciones hay. Es decir, cuántas combinaciones podemos obtener de elegir 12 cartas de entre las 81 que forman el mazo. Luego tenemos $\binom{81}{12} = \frac{81!}{12!\cdot 69!} = 70724320184700$ posibles combinaciones. De esas posibles combinaciones, la probabilidad de no encontrar un SET será la probabilidad de que con m cartas sobre la mesa, no exista un SET. También podemos calcular la probabilidad de obtener un SET dadas m cartas.

Para calcularlo, podemos escribir cada carta como un vector de la forma (x_1, x_2, x_3, x_4) donde cada componente es una de las características del juego. Cada característica podrá tener el valor $0, 1, 2$. Por ejemplo, si x_1 es la característica de color y el valor 0 es el color rojo, una tarjeta roja será de la forma $(0, x_2, x_3, x_4)$, donde x_2, x_3, x_4 son las demás características. Este vector se encontrará en el espacio vectorial $\mathbb{F}_3^4$. Para que tres cartas formen un SET, la suma de cada componente tiene que ser 0, es decir, la suma de los tres vectores tiene que ser igual al vector $(0, 0, 0, 0) \bmod 3$. Esto se da cuando todas las características son las mismas, ya que sumar 3 veces 0, 1 ó 2, siempre dará un múltiplo de 3, y cuando las tres son distintas, ya que $0 + 1 + 2 = 3 = 0 \bmod 3$. Podemos escribir las 81 cartas del mazo como vectores y, para que tres cartas formen un SET, la suma de los vectores deberá ser 0. Si tenemos 3 cartas, x, y, z, se tiene que cumplir que $x + y + z = 0 \bmod 3$. Por lo que podemos definir una condición en función de lo visto hasta ahora.

Condición 2.1. *Tres cartas, c_1, c_2, c_3 en $\mathbb{F}_3^4$ representan un SET cuando $c_1 + c_2 + c_3 = 0$*

Notemos que esta condición nos dice que dado un par de cartas, c_1 y c_2, siempre existe una tercera carta, c_3, que completa el SET ya que $c_3 = -(c_1 + c_2)$.

En el año 1971, Pellegrino descubrió que teniendo 21 cartas en la mesa, siempre es posible formar un SET. Esto se podría comprobar comprobando todas los posibles SETs que se pueden formar con esas 21 cartas, el problema es que hay 13636219405675528192 posibles SETs, por lo que es preferible calcularlo computacionalmente. Para ello, se pueden utilizar las simetrías del juego para reducir los posibles SETs que hay que estudiar. Por ejemplo, si tenemos un grupo de tres cartas del mismo color que forman un SET, podemos permutar ese color por los demás colores y las nuevas tres cartas, seguirán formando un SET. Dado que podemos permutar cada característica y podemos permutar todas ellas, hay un total de $3!^4 \cdot 4! = 31104$ simetrías que se pueden usar para simplificar el problema. De hecho, existe un grupo más grande de simetrías que ayuda a simplificar aún más el problema. Como una transformación afín de $\mathbb{F}_3^4$ lleva líneas a líneas, esta transformación no afectará si un subconjunto contiene una línea. Una trasformación afín de $\mathbb{F}_3^4$ tiene la forma $x \to Ax + b$, donde A es una matriz invertible 4×4 en $\mathbb{F}_3$ y b es un vector en $\mathbb{F}_3$. Para formar A, necesitamos una base de la forma $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ para $\mathbb{F}_3^4$. Hay $81 - 1$ opciones que deben ser distintas de 0 para v_1, $81 - 3$ opciones para v_2 dado que no debe estar en la línea definida por v_1, $81 - 9$ opciones para v_3 dado que no debe estar en el plano definido por v_1 y v_2; y $81 - 27$ opciones para v_4. De igual forma, hay 81 opciones para b. Esto nos da un grupo simétrico con $(81 - 1) \cdot (81 - 3) \cdot (81 - 9) \cdot (81 - 27) \cdot 81 = 1965150720$ elementos.

En febrero de 2001, el profesor Donald Knuth de la Universidad de Stanford escribió un primer algoritmo para calcular todas las probabilidades de que exista un SET en m cartas [2]. Más tarde, en marzo del mismo año, mejoró dicho algoritmo para que tardara menos tiempo en calcular dichas cifras.

En este primer programa, Knuth utilizó el grupo simétrico descrito anteriormente para comprobar que si hay 21 cartas sobre la mesa, deben contener un SET y también enumeró todas las manos de 20 o menos cartas que no contienen un SET, entendiendo por mano coger 3 cartas para ver si forman un SET. Por ejemplo, encontró que hay 2284535476080 manos de 12 cartas en las que no hay un SET. Dado que tenemos un total de 70724320184700 manos teniendo 12 cartas, el número obtenido por Knuth mostró que, aproximadamente, el 3 % de las cartas que se juegan inicialmente en la mesa, no contienen un SET. Además, el programa de Knuth cuenta el número de manos sin SET que no son equivalentes entre sí bajo la acción de la transformación afín del grupo. Dado que Knuth calculó las probabilidades de que no exista un SET, si hacemos $1 - P(\text{no tener SET})$ obtendremos la probabilidad de que exista un SET para cada m, siendo m el número de cartas que se encuentran en la mesa. Tales probabilidades quedan recogidas en la siguiente tabla.

m	Prob. %	m	Prob. %	m	Prob. %
1	0.00000000000	8	54.64664834418	15	99.963531493045
2	0.00000000000	9	70.27771529738	16	99.996602550906
3	1.26582278410	10	83.05495863763	17	99.999862737549
4	5.06329113924	11	91.82436777603	18	99.999998580641
5	12.41163899391	12	96.7698021414	19	99.999999999099
6	23.70281284338	13	98.9971922740	20	99.999999999985
7	38.33928895887	14	99.7686692197	21	100.00000000000

De esta tabla podemos estudiar algunos casos particulares. Sacando tres cartas al azar, la probabilidad de obtener un SET es muy baja, para calcular esta probabilidad no necesitamos ayuda de los ordenador ya que podemos calcularla de la siguiente forma. Como dadas dos cartas cualesquiera siempre existe una única carta con la que formar el SET, la probabilidad será $\frac{1}{79}$, ya que de 81 cartas que forman el mazo ya hemos elegido 2, por lo que solo nos quedan 79.

La probabilidad de que exista un SET entre las 12 cartas que colocamos sobre la mesa es de 96,77 %, por lo que la probabilidad de no encontrar un SET será de $100 - 96{,}77 = 3{,}23\,\%$, lo cual es poco probable que ocurra. Si se diera el caso en el que no se puede encontrar un SET entre las 12 cartas, las reglas nos obligan a añadir 3 cartas más, por lo que ahora tendremos 15 cartas sobre la mesa, lo que hace que la probabilidad de encontrar un SET aumente hasta el 99,96 %. Luego, la probabilidad de no encontrar un SET entre 15 cartas es $100 - 99{,}96 = 0{,}04\,\%$. Sin embargo, estas 15 cartas no son cartas aleatorias como se daba en el caso de tener 12 cartas, sino que partimos de las 12 cartas que se encontraban previamente en la mesa y con las cuales no ha sido posible encontrar un SET, por lo que la probabilidad de no poder formar un SET con esas 15 cartas es 1,14 %. Por último, de la tabla podemos deducir que a partir de 20 cartas, siempre es posible formar un SET.

Con este juego terminamos este capítulo y empezamos el siguiente, centrado en juegos combinatorios, donde los juegos que veremos han sido más estudiados a lo largo de los años.

Capítulo 3

Juegos combinatorios

3.1. Introducción

Los juegos combinatorios es una de las categoría en las que la teoría de juegos engloba una serie de juegos que comparten unas determinadas características. Son juegos principalmente de dos jugadores, de información completa y perfecta. Un juego es de información completa cuando todos los jugadores tienen conocimiento sobre las estrategias y las recompensas de cada jugador. Por otro lado, un juego es de información perfecta cuando se conocen todos los movimientos realizados y que pueden realizar cada uno de los jugadores. Luego, estamos ante juegos que presentan ambas características.

Entre estos juegos se encuentran algunos juegos para niños como el Nim y el Tres en raya, o algunos juegos de mesa más conocidos en todo el mundo, como son el Ajedrez, las Damas o el Go. Haremos un estudio de algunos de estos juegos para ver cómo las matemáticas nos pueden ayudar a ganar una partida, a decidir si es mejor ser o no el primer jugador o si se puede llegar a tablas si ambos jugadores juegan de forma perfecta. Empezaremos por el juego Nim, pasando al Tres en raya y terminando con las Damas y el Ajedrez, juegos más complicados de estudiar que los primeros. Todos estos juegos pueden ser perfectamente propuestos durante las clases ya que son juegos rápidos con los que se puede aprender fácilmente.

3.2. Nim

El juego consiste en colocar montones de un determinado objeto, por ejemplo monedas. Durante cada turno, cada jugador retirará el número de monedas que desee de solo uno de los montones, retirando como mínimo una moneda, pasando el turno al siguiente jugador. El ganador será aquel que se quede con la última moneda. Se conoce otra variante de este juego en el que el jugador que retira la última moneda es el perdedor, pero obviaremos esa variante.

Comencemos por el caso trivial. El caso en el que solo haya un un montón de monedas. Este será un caso en el que el primer jugador siempre ganará, ya que puede retirar todas monedas del montón y ganar automáticamente la partida.

Para el caso en el que tenemos dos montones, tenemos que diferenciar entre dos casos distintos. El caso en el que los dos montones tengan el mismo número de monedas y el caso contrario. Cuando tenemos el mismo número de monedas en los dos montones, es una situación donde puede ganar siempre el segundo jugador, para ello solo tendrá que seguir la estrategia de copiar lo que hace el primer jugador. Es decir, si el primer jugador extrae una moneda de un montón, el segundo jugador deberá hacer lo mismo con el otro montón, manteniendo siempre el mismo número de monedas en cada montón.

El caso en el que los montones tengan un número distinto de de monedas, es una situación en la que el primer jugador ganará siempre si en su primer movimiento iguala el número de monedas en ambos montones, una vez igualado el número de monedas, solo tendrá que imitar los movimientos del otro jugador, repitiendo el caso en el que ambos montones tenían el mismo número de monedas.

La estrategia completa para este juego fue descubierta por Charles Bouton, matemático americano. Esta estrategia, utilizada en [19], consiste en, teniendo dos enteros positivos, a y b, definimos los siguientes conceptos.

Definición 3.1. *Llamaremos* ***suma de nim*** *de a y b, y lo denotaremos por* $a \bigoplus b$*, a la suma de los números en su representación en base 2.*

La **suma de nim** de dos números enteros se realiza de la siguiente forma. Se escriben ambos números en base 2 y se suma cada componente individualmente módulo 2.

Por ejemplo, sean $a = 18$ y $b = 7$, $a \bigoplus b = 10010 \bigoplus 00111 = 10101$.

Definición 3.2. *Llamemos **posición de nim** al tablero en el que nos encontremos, T y sean $a_1, a_2, \cdots a_k$ los k diferentes montones que lo forman. El valor de nim del tablero T será la suma de nim de los montones:*

$$a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus \cdots \bigoplus a_k$$

*Llamaremos **posición de suma cero** si el valor de nim del tablero es cero.*

Ahora que disponemos de los conceptos necesarios, podemos definir el teorema de Bouton.

Teorema 3.1 (de Bouton)**.** *Sea T una posición de nim.*

- *Si T es una posición de suma cero, entonces cualquier movimiento de T te lleva a una posición distinta de la posición de suma cero.*
- *Si T no es una posición de suma cero, entonces existe un movimiento que lleva G a una posición de suma cero.*

Si T es una posición de suma cero, el segundo jugador puede ganar si consigue convertir los movimientos del otro jugador a una posición de suma cero. Como en cada turno se reduce el número de monedas disponibles para coger, el juego terminará en algún momento y el segundo jugador tendrá la última moneda.

Por otro lado, si T no es una posición de suma cero, entonces el primer jugador será el que pueda llegar a ganar la partida, haciendo que el juego sea una posición de suma cero.

Veamos un ejemplo. Supongamos que el tablero T tiene 3 montones distinto, de 24, 21 y 15 monedas respectivamente. Si realizamos la suma de nim de estos números tenemos $24 \bigoplus 21 \bigoplus 15 = 11000 \bigoplus 10101 \bigoplus 01111 = 00010$, por lo tanto $24 \bigoplus 21 \bigoplus 15 = 2$. Como no es una posición de suma cero, el primer jugador puede garantizar ganar la partida si consigue una posición de suma cero. Para conseguir esta posición de suma cero, el primer jugador deberá coger dos monedas del montón de 15 monedas. Esto hará que la suma de nim sea $24 \bigoplus 21 \bigoplus 13 = 0$.

Demostración. La demostración del primer punto es trivial. Sean $a_1, a_2, \cdots, a_k$ los k diferentes montones en un tablero T, cuya suma de nim es cero, es decir, $a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus \cdots \bigoplus a_k = 0$. Consideremos un movimiento cualquiera que transforma a_1 en $a_1^{'}$. Por lo tanto, $a_1^{'} \bigoplus a_2 \bigoplus \cdots \bigoplus a_k \neq a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus \cdots \bigoplus a_k = 0$. Luego la suma de nim después del movimiento es distinta de cero.

Para el segundo punto supongamos lo contario, $a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus \cdots \bigoplus a_k \neq 0$. Llamemos x al valor de esta suma. Podemos escribir esta suma en columna para verlo más claro. Tenemos que conseguir que la suma de estos números en base 2 sea 0. Como esta suma es distinta de cero, debe haber mínimo una columna con un número impar de 1's. Para conseguir un cero, debemos hacer que el número de 1's de cada columna sea par, por lo que tenemos que cambiar uno de los números para conseguir esto, empezando siempre por la columna que se encuentre más a la izquierda, buscando 1's para cambiarlos por 0, ya que esto nos permitirá tener siempre un número más pequeño, por lo que el movimiento estará permitido.

Veamos la última parte de la demostración con el ejemplo realizado antes. Teníamos $24 \bigoplus 21 \bigoplus 15 = 11000 \bigoplus 10101 \bigoplus 01111 = 00010$, escribimos esta suma en una columna.

$$\begin{array}{cr} & 11000 \\ \bigoplus & 10101 \\ \bigoplus & 01111 \\ \hline & 00010 \end{array}$$

Como se puede ver, hay una columna que no es cero, por lo que está será la columna que debemos modificar. Podríamos pensar que tenemos 3 opciones dado que tenemos 3 posibles números para cambiar pero, por lo dicho anteriormente, debemos intentar cambiar 1's por 0's empezando por la izquierda. En este caso tenemos que modificar la segunda columna empezando por la derecha. Como solo tenemos un 1 en esa columna, debemos reducir ese número a 0. En el ejemplo realizado anteriormente, hemos cambiado el tercer número de 01111 a 01101, cambiando 1 por 0 en dicha columna, así la suma final será cero. $\square$

Otro juego que sigue la misma estrategia el Nim cuando solo hay dos montones de fichas es el siguiente. El juego consiste en colocar un número par de fichas en un círculo y cada jugador retirará una o dos fichas durante su turno. En el caso de retirar dos fichas durante un turno, estas fichas no deben tener un espacio entre ellas, es decir, se deben retirar dos fichas que se encuentren juntas. El jugador ganador será el que retiré la última o últimas fichas de la mesa.

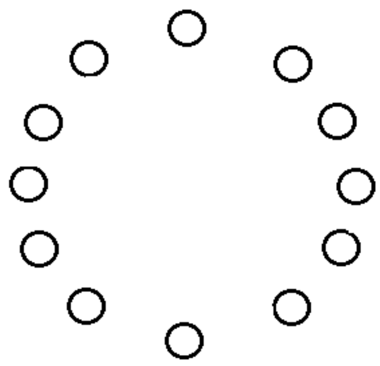
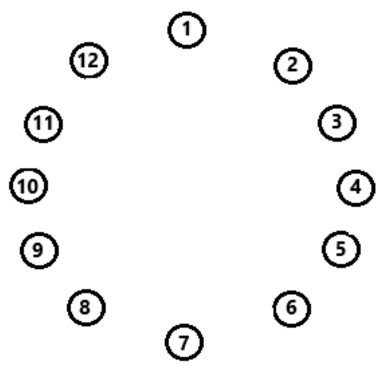


Figura 3.1: Posible partida con 12 fichas

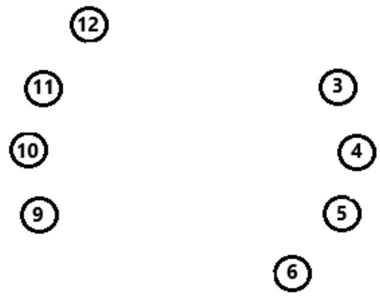
La estrategia ganadora para el segundo jugador consiste en copiar los movimientos del primer jugador, es decir, si el primer jugador retira una o dos fichas, el segundo jugador retirará también una o dos fichas. La estrategia se divide en dos partes, la primera se corresponde con la primera jugada del jugador 1, mientras que la segunda se desarrolla una vez que ambos jugadores han completado su primer turno. Para ver de forma más clara como funciona la estrategia, numeremos las fichas de la siguiente forma:



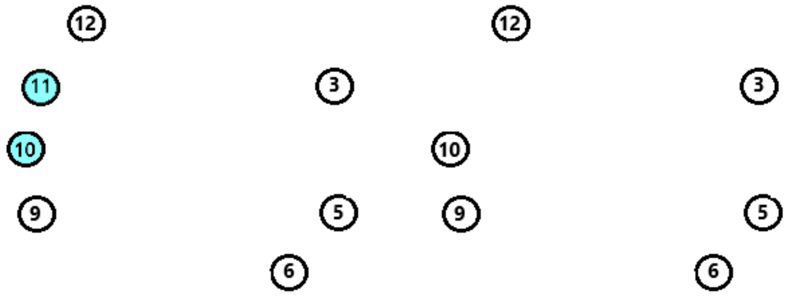
Durante el primer turno, el jugador 2 debe retirar las fichas equidistantes diagonalmente a la ficha o fichas que retire el primer jugador. De esta forma se crearán dos conjuntos de fichas separados. Por ejemplo, si el jugador 1 retira las fichas 1 y 2, el jugador 2 deberá retirar las fichas 7 y 8, quedando los conjuntos $\{3, 4, 5, 6\}$ y $\{9, 10, 11, 12\}$. Como el número de fichas totales es par y ambos jugadores han retirado el mismo número de fichas, ambos conjuntos tienen el mismo tamaño. Como ambos jugadores han jugado su primer turno, empieza la segunda parte de la estrategia.

El jugador 2 debe seguir con la estrategia de retirar el mismo número de fichas que el jugador 1, pero ahora, a diferencia del primer turno, no será necesario que retire las fichas diametralmente opuestas. Durante los siguiente turnos, el jugador 2 deberá hacer que ambos conjuntos tengan formas congruentes [1]. Para ello, el segundo jugador retirará la ficha o las fichas del conjunto del cual no haya retirado fichas el primer jugador, de forma que ambos conjuntos tengan formas congruentes. Siguiendo con el ejemplo, supongamos que ahora tenemos el siguiente dibujo.

[1]Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas.



Si el jugador 1 retira la ficha 4, para que ambas formas sean congruentes, el jugador 2 deberá retirar la ficha 10 o la ficha 11.



Si el jugador 2 retira por ejemplo la ficha 11, como podemos observar en la imagen de la derecha, ambas formas son congruentes. Siguiendo esta estrategia hasta el final de la partida, el jugador 2 será el último en retirar una ficha, siendo así el ganador.

Sería interesante probar este juego en un aula para que los alumnos intenten describir la estrategia, es decir, cosas como hay que retirar la ficha opuesta o la simétrica no serían válidas en este caso dado que no es una definición exacta de cuál es la ficha que hay que retirar.

3.3. Tres en raya

Es un conocido juego para el que solo se necesitan papel y lápiz. El juego consiste en ser el primer jugador en formar una raya en el tablero de 3×3 cuadrados. Cada jugador elegirá una figura, X o O, y durante su turno deberá colocar una en un cuadrado, intentando conseguir 3 seguidas formando una línea en vertical, horizontal o diagonal. Una vez que se llenen todos los cuadrados se termina la partida. Si ningún jugador ha conseguido formar una línea, la partida termina en tablas.

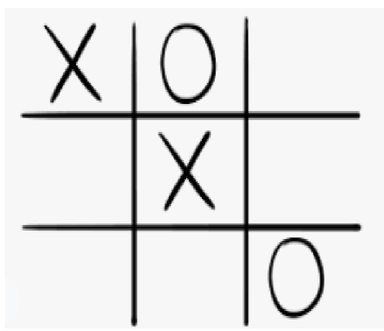


Figura 3.2: Partida de Tres en Raya

El tres en raya es un juego en el que podemos hablar de dos tipos de jugadores, el jugador que construye y el jugador que bloquea. En este caso del tres en raya, el jugador 1 sería el jugador constructor ya que al empezar el primero será el primero que tenga dos casillas ocupadas, mientras que el jugador 2 será el jugador que bloquea, ya que su juego se centrará en cerrar las posibles líneas del jugador 1.

En los juegos combinatorios siempre se hace una pregunta, ¿qué jugador puede ser el primero en ganar? Es decir, en el caso del tres en raya, ¿qué estrategia debe seguir cada jugador para poder ganar? Esta pregunta no es sencilla de responder ya que no existe un teorema que pueda responderla, solo se puede resolver esta cuestión mediante un estudio de casos. Se ha probado, mediante un estudio de casos bloqueando simétricamente las casillas que juegue el jugador 1, que todos los tableros de $n \times n$ casillas, son juegos que terminan siempre en tablas si ambos jugadores juegan óptimamente, es decir, si ambos jugadores no comenten ningún error durante la colocación de fichas. El juego tradicional se desarrolla en un tablero en 2D, pero, al igual que podemos aumentar el tamaño de este tablero modificando el valor de n, también podemos aumentar la dimensión del mismo, teniendo tableros en 3D e incluso en 4D.

Estudiaremos primero el juego con el tablero tradicional, el tablero de 3×3, de la misma forma que lo estudian en el libro [12]. El tres en raya de 3^2 casillas, es un juego combinatorio de dos jugadores en el cual se puede obligar a llegar a tablas. Todo jugador del tres en raya sabe que es un juego en el que se puede obligar al contrincante a llegar a tablas. El primer jugador siempre puede llegar a tablas si sigue una estrategia. Esta estrategia consistirá en intentar formar una línea en cada movimiento, el segundo jugador solo podrá cerrar los movimientos del primer jugador para que no consiga su objetivo. De esta forma el primer jugador nunca podrá ganar, pero, a su vez, el segundo jugador tampoco podrá ganar debido a que solo jugará bloqueando los movimientos del primer jugador, por lo que finalmente no quedarán casillas libres y el juego terminará en tablas. Podemos estudiar todos los posibles movimientos que se pueden dar durante una partida. Para ello supondremos que ambos jugadores juegan óptimamente, es decir, de forma perfecta y sin cometer errores, para esto, deberán seguir los siguiente pasos:

- Cada jugador completa una línea si es posible, ganando así el juego.
- Cada jugador intentará, en la medida de lo posible, impedir que el otro jugador complete la línea.

Tendremos en cuenta el siguiente tablero para poder identificar de forma sencilla las casillas del mismo. Además, llamaremos línea a formar tres en raya, lo que sería igual a ganar la partida.

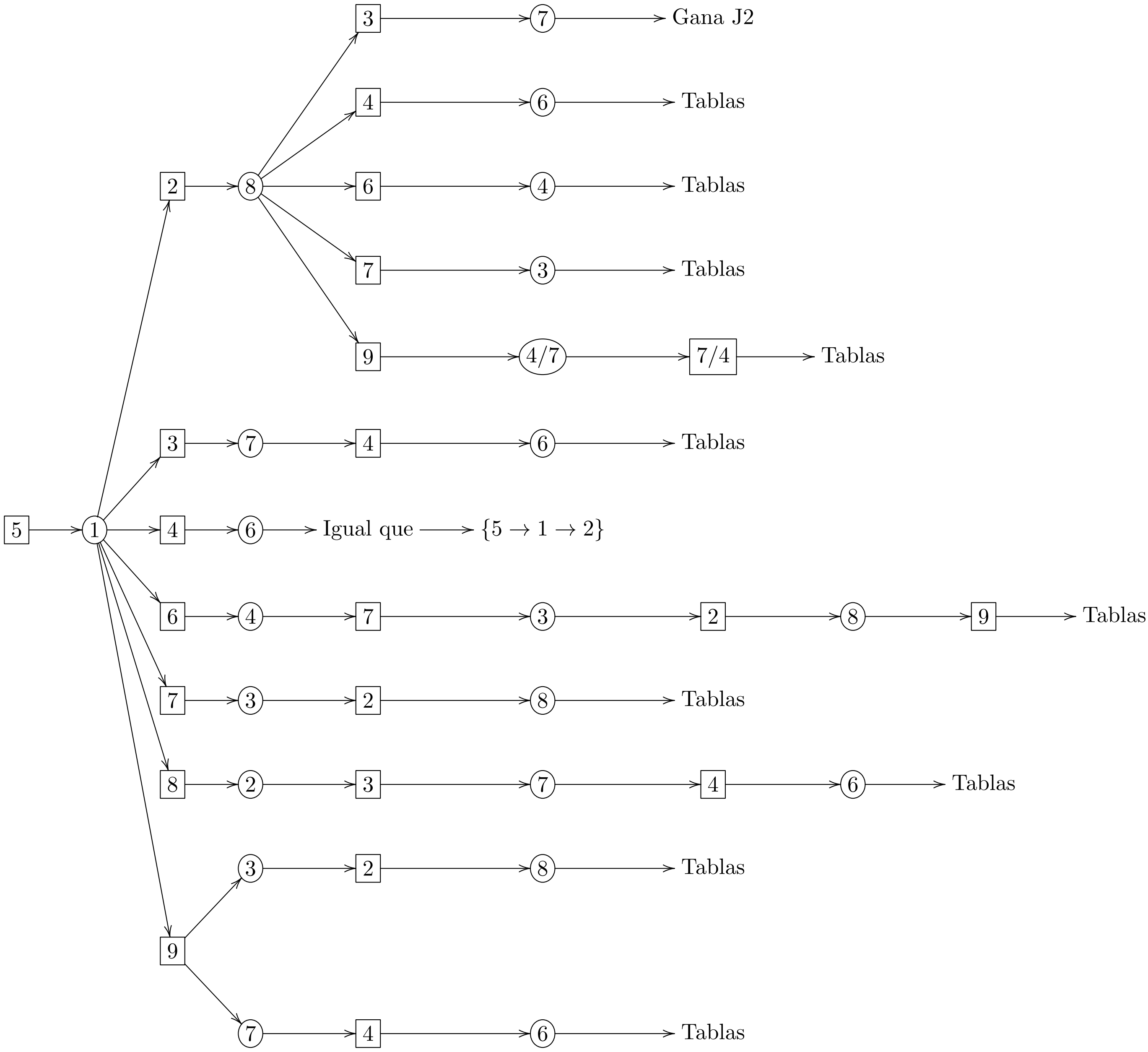
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Aunque se podría pensar que existen 9 posibles comienzos dado que hay 9 posibles casillas, en realidad solo existen 3 posibles comienzos. Comenzar en el centro, punto 5, en una de las esquinas, puntos 1, 3, 7 y 9, o en uno de los otros, puntos 2, 4, 6 y 8. Esto se debe a que en el juego se dan una serie de simetrías. Todas las líneas que pasan por el centro, forman un eje de simetría. También se puede notar que el punto 5 es el mejor punto del tablero ya que se pueden formar 4 posibles líneas, las dos diagonales y las dos perpendiculares. Una vez tomado el centro, los mejores puntos serán los que se encuentran en las esquinas, ya que son aquellos por los que pasan tres líneas en vez de dos.

Como hemos visto que el centro es el mejor punto para empezar, supongamos que el J1 son las X, las demás líneas que no pasan por el centro, se pueden bloquear como se ve en el siguiente tablero:

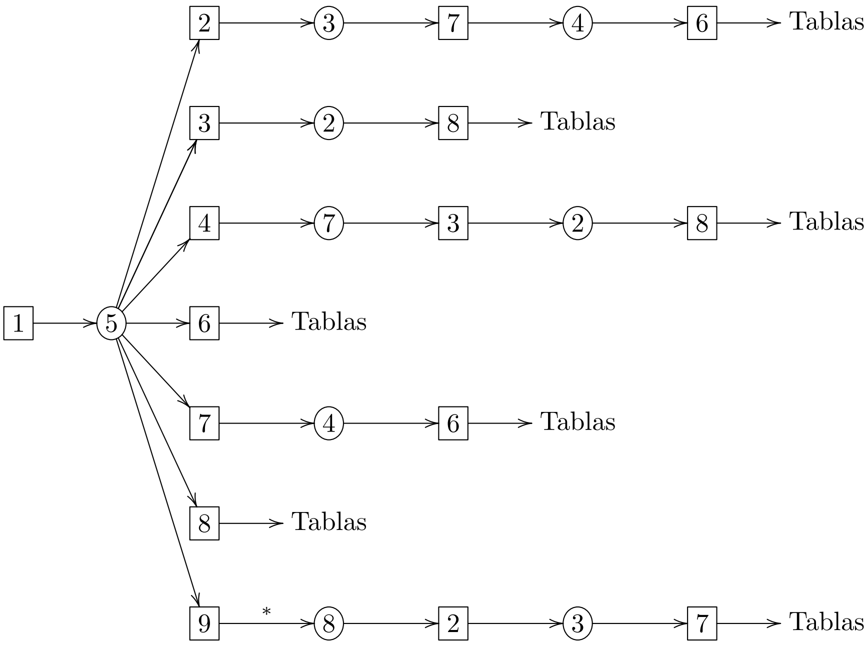
<table>
<tr><td>|</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>|</td><td>X</td><td>|</td></tr>
<tr><td>-</td><td>-</td><td>|</td></tr>
</table>

Supongamos ahora que jugamos una partida normal. El primer jugador podrá elegir entre los tres posibles comienzos, veamos los casos que se dan dependiendo de los movimientos del segundo jugador. Estudiemos primero qué ocurre si el jugador 1 elige como primera casilla el centro, casilla con más posibles líneas. El jugador 1, al que llamaremos a partir de ahora J1, será los cuadrados mientras que el jugador 2, al que llamaremos J2, será los círculos.



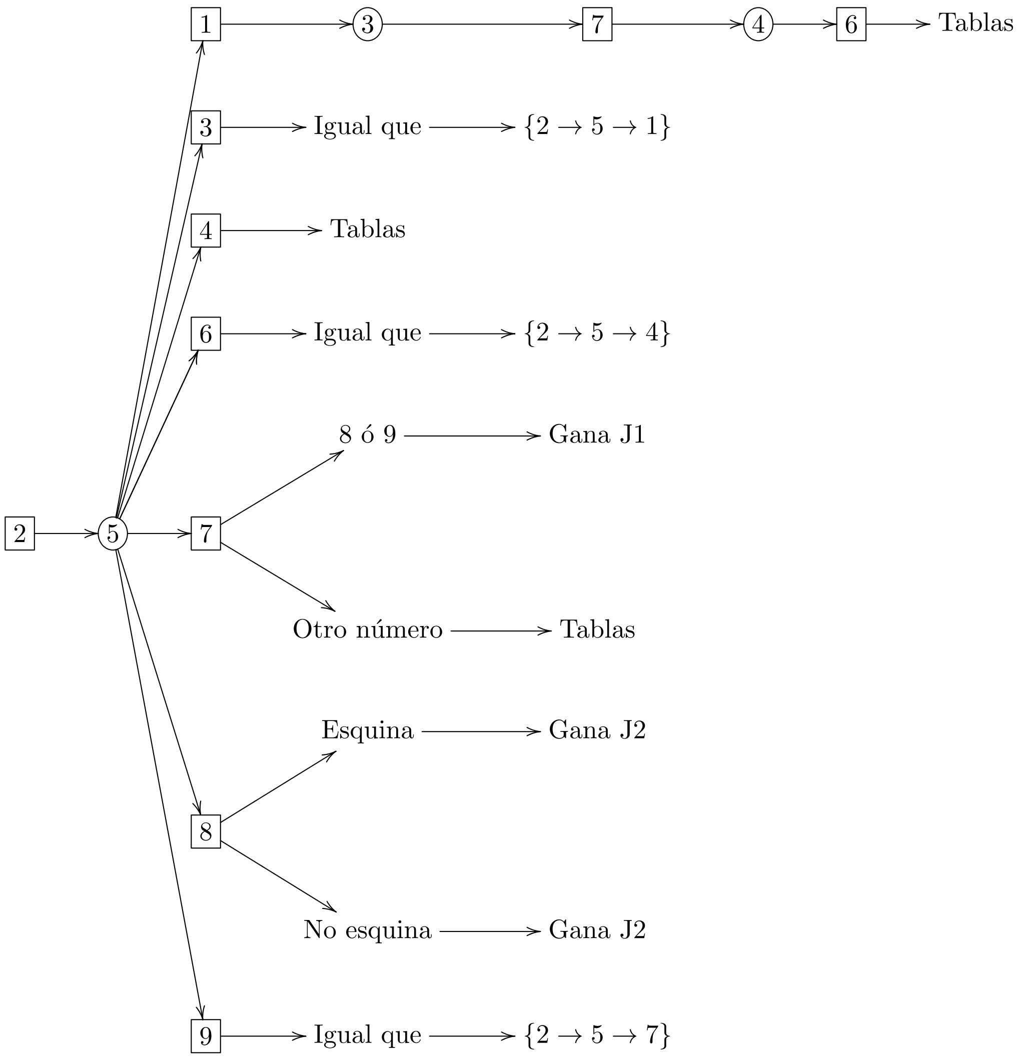
Supongamos ahora que el jugador 1 elige comenzar en una de las esquinas, por ejemplo la casilla 1. Si el jugador 1 no elige la casilla del centro en su primer movimiento, lógicamente el jugador 2 será el que elija dicha casilla.

El árbol que indica qué movimiento realiza cada jugador, siguiendo los supuestos anteriores cuando el jugador 1 comienza en una esquina, por ejemplo la esquina 1, es el siguiente:



(*) Si el J2 elige una de las esquinas restantes, el 3 o el 7, terminará ganando el J1, dado que al elegir una de esas esquinas obliga al jugador contrario a elegir la esquina opuesta. En el siguiente movimiento el J1 tendrá dos posibles líneas. Dado que el J2 solo podrá bloquear una de estas líneas, el J1 ganará en su siguiente movimiento.

Por último, estudiemos el caso en el cual el J1 no empieza ni en el centro ni en una de las esquinas. Por ejemplo, pongamos que empieza en la casilla 2. Igual que en el caso anterior, el J2 cogerá el centro en su primer movimiento.



Con esto hemos probado que el tres en raya de 3×3, si ambos jugadores juegan óptimamente y sin cometer ningún error, es un juego que termina en tablas, ya que para cada jugador siempre hay una elección que te lleva a tablas, haga lo que haga el contrincante. Se ha probado que para $n \geq 2$, todo juego con un tablero de $n \times n$, es un juego que termina en tablas.

Si $n \geq 5$, probar que el juego termina en tablas siempre que ambos jugadores jueguen óptimamente, se puede hacer con una simple estrategia de emparejamiento. Si el J1 elige el número 1, el J2 deberá elegir el otro número 1, así impedirá todas las posibles líneas del J1, lo que hará que el juego termine en tablas.

1	5	3	5	2
7	12	9	9	8
4	12	X	10	4
7	11	11	10	8
2	6	3	6	1

Siguiendo la misma estrategia, se puede probar que todo juego con un tablero de $n \times n$, con $n \geq 5$ acaba en tablas.

Para el caso $n = 4$ es un poco más complicado probar que el juego termina en tablas, ya que no se puede dar una estrategia de emparejamiento que permita al J2 bloquear todas las líneas del J1. En este caso, existe más de un punto por el que pasan la mayor cantidad de líneas. En el tablero de 3×3 era el centro, en este caso tenemos más de un punto por los cuales pasan un máximo de 3 líneas. En este caso, aunque el J2 no puede seguir una estrategia de emparejamiento clara, puede bloquear las jugadas del J1 usando una combinación de

3 diferentes estrategias. Como por esos puntos pasan un máximo de 3 posibles líneas, el J2 deberá bloquear cada línea dependiendo de los movimientos que haga el J1. Este argumento se ha conseguido gracias a David Galvin, profesor asociado en la Universidad de Notre Dame, en Indiana. Para ver las tres estrategias, primero debemos ver cuáles son las diferentes posiciones de comienzo. Como ya hemos visto en el caso de 3×3, podemos pensar que existen 16 casillas en las que el J1 puede empezar, pero ya hemos visto que debido a la simetría del tablero, a la hora de empezar la partida algunas casillas se pueden considerar las mismas. Si no tenemos en cuenta estas simetrías, las posibles casillas para comenzar la partida se reducen a 3, empezar en una de las esquinas, en otra de las casillas del borde del tablero o en una de las casillas del interior del tablero. Veamos cuál es la estrategia para que el J2 consiga forzar las tablas dependiendo de la casilla en la que empiece el J1, jugador que marcaremos con X. El primer movimiento del J2 vendrá siempre determinado por la casilla que haya elegido el J1 en su primer movimiento. Los siguiente movimientos del J2 consistirán en una estrategia de emparejamiento siguiendo los siguiente números.

Si el J1 comienza en una esquina:

X	3	4	3
1	O	5	6
1	5	7	7
2	2	4	6

Si el J1 comienza en el borde del tablero sin ser una esquina:

1	X	3	3
1	O	2	5
7	2	6	7
4	4	6	5

Si el J1 comienza en una casilla que no se encuentra en el borde.

4	2	1	1
7	X	O	6
3	3	4	6
7	2	5	5

Podemos notar que en los tres tableros, por cada línea horizontal, vertical o diagonal, siempre que no haya puesto el J2 su primera ficha (O), siempre hay un par de números, lo que hace que el J2 siempre pueda bloquear todos los intentos de conseguir la línea del J1.

Con esto hemos probado que para $n = 4$ el juego también termina en tablas. Por lo tanto, para todo n el tres es raya es un juego en el que, a menos de que se cometa algún error, siempre se pueden conseguir las tablas.

Como habíamos comentado al principio de la sección, el tres en raya es un juego en el que podemos ampliar tanto el tamaño del tablero como la dimensión del mismo. ¿Qué ocurre si aumentamos la dimensión del tablero? Por desgracia, para el tres en raya en 3 dimensiones, $n \times n \times n = n^3$ se conoce mucho menos que para el tres en raya 2 dimensional. Aunque no daremos más detalles, ya ha sido probado en [12] que el $3 \times 3 \times 3$ y el $4 \times 4 \times 4$, también llamado Qubic, tienen estrategia ganadora para el primer jugador, pero aún no se ha demostrado que sucede con los tableros 3 dimensionales para $n = 5$, 6 y 7, aunque se sabe que a partir de $n = 8$ el juego termina en tablas. Parecido se sabe de los tableros en 4D, para $n = 3$ y $n = 4$ gana el primer jugador, pero para $n \geq 5$ no se sabe qué ocurre.

3.4. Damas

Es un juego de dos jugadores, compuesto por un tablero cuadriculado de 8×8, con cada casilla intercalando los colores negro y blanco y 12 figuras por jugador. El juego consiste en capturar todas las piezas del jugador contrario. Las piezas se mueven una casilla en diagonal, intentando capturar las piezas del contrincante, para ello es necesario pasar por encima de esas fichas. Las fichas solo pueden avanzar hacia delante hasta que llegan al final del tablero. Una vez que llegan al final del tablero, se convierten en damas y se pueden mover en diagonal todas las casillas que se desee. Aunque existe la versión internacional de las damas utilizando un tablero de 10×10 y 20 fichas por jugador, debido a su complejidad, equivalente a la del ajedrez, no se estudiará en este trabajo.

Si un jugador puede capturar una ficha, el juego obliga a dicho jugador a capturar esa ficha. Si al capturar una ficha, el jugador tiene la opción de comer otra, puede hacerlo, saltando por encima de todas las fichas que pueda capturar. En el caso de tener la opción de capturar dos piezas, el jugador deberá optar por aquella que capture el mayor número de piezas contrarias. Si se pueden capturar el mismo número de piezas, deberá optar por aquella opción en la que capture más damas.

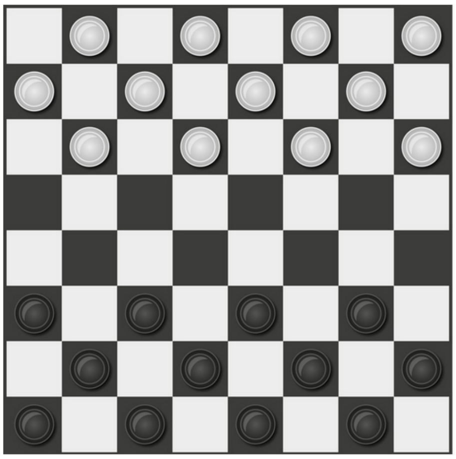


Figura 3.3: Tablero de Damas

La partida termina en tablas si se da uno de estos casos:

- Todas las piezas se bloquean entre sí y ningún jugador puede realizar ningún movimiento, por lo que el juego no puede avanzar.

- Si los dos jugadores se quedan con una sola ficha. Cada jugador podrá impedir que el otro jugador capture su ficha, por lo que en ningún momento se terminará la partida.

En los años 90, Jonathan Schaeffer lideró el equipo que escribió el código de Chinook, este programa es considerado el mejor jugador de damas del mundo. En julio de 2007, 18 años después de programar Chinook, Jonathan Scaheffer demostró con ayuda de los ordenadores que, si ambos jugadores juegan perfectamente, sin cometer fallos, las damas es un juego que termina en tablas. Este artículo se publicó en la revista Science el 20 de julio de 2007 [10].

La teoría de juegos combinatorios tiene diversas maneras de medir la dificultad de un juego. Entre ellas podemos encontrar la complejidad de decisión y la complejidad del espacio de estados. La complejidad de decisión es el número de nodos finales en el árbol de decisión del juego, siendo el árbol de decisión un subconjunto del árbol del juego, donde cada nodo está etiquetado según lleve a la victoria de uno u otro jugador o al empate, suponiendo que ambos jugadores juegan perfectamente. El árbol de un juego es un tipo de grafo en el cual los nodos son las diferentes posiciones del juego y las aristas son los movimientos posibles de un estado a otro. Por otro parte, la complejidad del espacio de estados es el número de posiciones legales del juego, accesibles desde la posición inicial, a mayor número de posiciones, mayor dificultad tendrá el juego.

Estudiaremos cómo se desarrolla el programa que determina que el juego termina en damas. El juego de las damas está considerado por tener un alto nivel de complejidad de decisión, se requiere una gran habilidad para poder realizar buenas elecciones de movimiento, y un alto nivel de espacio de estados, 5×10^{20}. Por ello, representa uno de los juegos más complicados de resolver de forma computacional. La demostración llevada a cabo por el programa de Schaeffer, utiliza tres algoritmos principales.

- Bases de datos de fin de juego. Los cálculos realizados desde el final del juego hasta la posición inicial han dado como resultado una base de datos de $3{,}9 \times 10^{13}$ posiciones, todas ellas con 10 piezas o menos en el tablero, para las cuales ya se ha calculado el valor teórico del juego.

- Administrador del árbol de juego. Esta componente, mantiene el árbol de juego en progreso, lo recorre y genera las posiciones necesarias que deben ser estudiadas para avanzar en la demostración.

- Solucionador. Dada una posición por el administrador del árbol, esta componente se encarga de determinar el valor de dicha posición.

Estos algoritmos se encargan de calcular todas las posibles jugadas y de asignarles un valor determinado entre ganar, perder o empatar.

El primer algoritmo se encarga de buscar en las posiciones finales del juego y determina su valor, ya sea ganar, perder o empatar. Para ello utiliza un análisis retrospectivo, es decir, comienza desde el final del juego y va avanzando hasta llegar al inicio del mismo. Enumera todas las posiciones de una pieza y determina su valor. Después, realiza la misma operación con dos piezas y así sucesivamente con un número de piezas menor o igual que 10. La base de datos del programa contiene el valor de ganar, perder o empatar para cada posición, no el número de movimientos que hay que realizar para ganar o perder.

El segundo algoritmo, el administrador del árbol de juego, se encarga de identificar las posiciones que deben ser estudiadas. Utiliza el algoritmo de búsqueda PN (proof number) para identificar la lista prioritaria de posiciones que deben ser examinadas.

Por último, el solucionador recibe del administrador una posición para ser evaluada. El resultado de la posición puede ser probada (ganar, perder o empatar), parcialmente probada (al menos o a lo sumo empatar) o heurística (una estimación de cuan buena o mala es una posición). Las posiciones probadas no llevan trabajo, mientras que las parcialmente probadas necesitan un trabajo adicional si el administrador determina que se necesita un valor probado, es decir, si se necesita saber si su valor es ganar, perder o empatar. Si no se puede devolver esta información, entonces el solucionador devolverá una estimación del valor de la posición. Una vez obtenido el valor, el administrador actualizará el árbol de juego y repetirá este proceso hasta que se obtenga una solución probada para el juego, es decir, hasta que el juego se pueda terminar en ganado, perdido o empatado.

Con ayuda de los ordenadores, fue posible implementar dichos algoritmos y conseguir estudiar todas posibles posiciones del juego. Algo que en los años 90 fue imposible y llevó una gran cantidad de años, con los avances informáticos fue posible en 2007. Con las damas resueltas, la siguiente cuestión que queda es si el ajedrez es también un juego que se pueda resolver con la ayuda de los ordenadores. A diferencia de las damas, el ajedrez tiene una complejidad del espacio de estados de 10^{47} y un tamaño del árbol de juego de 10^{123}. Como podemos observar son valores mucho más altos que los que teníamos para las damas, por lo que, viendo el esfuerzo que ha sido requerido para resolver las damas, el ajedrez aún permanecerá sin resolver mucho tiempo, a menos que las nuevas tecnologías permitan su cálculo. Veamos qué podemos decir acerca del ajedrez, un juego en el que se desconocen estrategias ganadoras o si el juego se puede llevar a tablas jugando perfectamente.

3.5. Ajedrez

Las reglas del ajedrez son más complejas que las reglas de los juegos de los que hemos hablado hasta ahora. El juego consiste en hacer *Jaque mate* al rey del jugador contrario, esto quiere decir que haya un momento en el que el rey esté en peligro de ser comido y no pueda moverse a ninguna otra casilla para evitarlo. El tablero, al igual que el tablero de las damas, es un tablero que intercala casillas negras y blancas, pero en vez de ser de 10×10 en este caso es de 8×8. Cada jugador dispone de 16 piezas de un color, negro o blanco. Existen 6 tipos diferentes de piezas y cada una se mueve de una determinada forma. Las 16 piezas se componen de:

- 1 rey. Es la pieza más importante ya que el juego consiste en comer esta pieza. Solo se puede mover una casilla en cualquier dirección. Durante la partida, esta pieza no puede estar en una casilla en la que sea comido, denominada *Jaque*, por lo que cada vez que se encuentre en esta situación deberá ser movido a una casilla segura si es posible, si no es posible mover al rey, el Jaque será *Jaque mate* y se habrá terminado la partida.
- 1 reina. Es la pieza con más libertad de movimiento del juego. Se puede mover tanto en ortogonal como en diagonal a lo largo de todo el tablero, sin restricción en el número de casillas que puede avanzar.
- 2 torres. Las torres se pueden mover ortogonalmente por el tablero, el número de casillas que se desee, pero nunca en diagonal.
- 2 caballos. Los caballos tienen una forma especial de moverse, ya que solo pueden moverse formando una *L*. Son la única ficha del juego que puede saltar a otras fichas, es decir, si una ficha se encuentra en su camino, puede pasar mientras la casilla a la que se vaya a mover, esté libre.
- 2 alfiles. Los alfiles solo se pueden en diagonal, sin restricción en el número de casillas. Cada uno de ellos estará colocado en uno de los colores.
- 8 peones. Estos solo se pueden mover una casilla verticalmente por la columna en la que se encuentran. Ocasionalmente se podrán mover en diagonal para comer una pieza del contrincante y al principio de la

partida podrán moverse dos casillas en vez de una. Nunca podrán ir hacia atrás. Si un peón consigue llegar a la última fila de una columna, será cambiado por otra pieza que no sea el rey. Retirando el peón del juego y poniendo esa pieza en su lugar. En general se suele sustituir por una reina, dado que es la que dispone de más libertad de movimiento.

Figura 3.4: Tablero de Ajedrez

El juego consiste en comer al rey del jugador contrario, es decir, poner en una situación de Jaque Mate al otro jugador. El jugador que consiga hacer un jaque mate al otro jugador, será el ganador de la partida. Si esta situación no es posible, pueden ocurrir dos casos. Ninguno de los jugadores puede comer al rey contrario, por ejemplo en el que solo queden en el tablero los dos reyes, entonces se dice que la partida termina en tablas y no gana ningún jugador. La otra posibilidad es que uno de los jugadores ahogue al jugador contrario. Esto se da cuando el jugador al que le toca mover no puede mover ninguna pieza y el rey no se encuentra en jaque. Es decir, las únicas casillas a las que podría mover el rey estén ocupadas por otras piezas, o en dichas casillas ponga al rey en jaque. Si el jugador no tiene ninguna otra pieza para mover siguiendo las reglas, se dice que el rey está ahogado, lo cual hace que la partida termine en tablas. Esta técnica es muy utilizada a propósito en los finales de la partida. Si un jugador ve claro que puede perder, puede intentar conseguir que el jugador contrario ahogue a su rey, lo que hará que la partida termine en tablas.

A diferencia de los juegos combinatorios que hemos estudiado hasta ahora, el ajedrez no es un juego en el que podamos determinar una estrategia para ganar la partida o conseguir que la partida termine en tablas debido a la cantidad de piezas con diferentes formas de movimientos, así como de las diferentes jugadas que se pueden realizar durante una partida. Aún así, existen algunos problemas que se pueden estudiar matemáticamente como pueden ser el **Problema del caballo** o el **Problema de las n reinas**.

El problema más conocido es el **Problema del caballo**. Este problema consiste en encontrar un recorrido por el cual el caballo recorra el tablero pasando una sola vez por cada casilla. Existen variantes que hacen el problema más complejo, tales como buscar un recorrido que empiece y termine en la misma casilla o ampliar el tamaño del tablero convencional. Una de las primeras soluciones dadas se encuentra en un manuscrito que data del siglo IX de nuestra era. Este manuscrito del árabe Abu Zakariya Yahya ben Ibrahim recoge dos recorridos válidos proporcionados por dos ajedrecistas. Uno de los recorridos se atribuye a Al-Adli ar-Rumi, un jugador que también es autor de uno de los libros sobre el Shatranj, una forma antigua de ajedrez, mientras que el otro manuscrito pertenece a Ali C. Mani, también jugador de ajedrez de la época. [6]

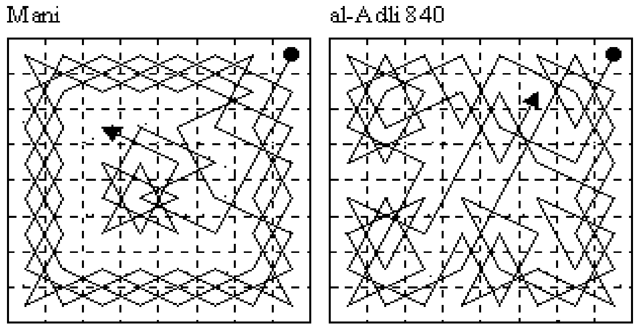


Figura 3.5: Soluciones recogidas en el manuscrito de Abu Zakariya

Como se puede observar en la imagen 3.5, el recorrido creado por Mani, no es un recorrido cerrado, mientras que el recorrido creado por al-Adli es un recorrido cerrado, dado que empieza y termina en la misma casilla. Si un recorrido empieza y termina en la misma casilla, es decir, si tenemos un recorrido cerrado, diremos que se trata de un camino.

Los primeros estudios matemáticos acerca de este problema, no se dieron hasta el siglo XVIII, cuando Leonhard Euler (1707-1783) presentó su estudio sobre este problema a la Academia de Berlín, la cual ofrecía un premio de 4000 francos a quien ofreciera alguna resolución al problema del caballo, se dice que Euler no pudo obtener este premio debido a que en ese momento era el Director de Matemáticas de la academia, aunque nunca llegó a tener el título de presidente de la misma. Aunque en aquella época se conocían ya algunas soluciones al problema, como la dada por el matemático Abraham de Moivre (1667-1754), aún se desconocía si existía un número finito de ellas o un algoritmo que permitiera conocerlas.

Actualmente podemos afirmar que, para poder contar todos los recorridos posibles, necesitamos de la ayuda de los ordenadores. Ya en el año 1995, Ingo Wegener (1950-2008) y Martin Löbbing, dos programadores alemanes consiguieron, después de hacer trabajar durante 4 meses a 20 potentes ordenadores, determinar el número total de recorridos no cerrados del caballo, como queda recogido en el libro [17]. Estos programadores dedujeron que había 33.439.123.484.294, más de 33 billones de recorridos no cerrados. Con el paso de los años y la creciente mejora de las tecnologías, este número ha conseguido aumentar, llegando a los últimos datos que se conocen, dados por Alexander Chernov, quien afirma que existen un total de 19.591.828.170.979.904 posibles recorridos no cerrados.

Como ya hemos comentado anteriormente, existen dos versiones de este problema, dependiendo de si el caballo debe terminar en la misma casilla en la que comenzó o no, es decir, si tiene que formar un recorrido cerrado o no. En esta sección estudiaremos los recorridos cerrados, ya que son los que están completamente resueltos.

Podemos entender el problema del caballo como el siguiente problema:

Sobre que tableros de dimensiones $m \times n$, podemos encontrar un camino para que el caballo lo recorra completamente, empezando y terminando en la misma casilla.

Por conveniencia, asumiremos que $m \leq n$, además, nombraremos las casillas como (i, j), empezando a contar en la esquina superior izquierda, la que será la casilla $(1, 1)$, la primera componente serán las filas y la segunda las columnas. Luego, el movimiento del caballo nos permitirá hacer el siguiente movimiento de casilla, suponiendo que empezamos en la casilla (i, j), podremos movernos a una de las siguientes casillas $(i \pm 2, j \pm 1)$ o $(i \pm 1, j \pm 2)$. Este problema nos ayudará a explicar algunos conceptos de la teoría de grafos. Para ello, definamos primero algunos de los conceptos que utilizaremos más adelante, utilizando los apuntes [21] y el libro [11]:

Definición 3.3. *: Llamaremos* ***Grafo*** *G al par $G = (X, U)$, donde X es un conjunto de puntos no vacío que se denominan vértices o nodos y U es un conjunto de aristas entre los elementos de X.*

Definición 3.4. *Si consideramos que la arista (x_i, x_j) es distinta de la arista (x_j, x_i), diremos que el grafo es un* ***Grafo orientado****.*

Definición 3.5. *Llamaremos* ***orden del grafo*** *al cardinal del conjunto X. Si el cardinal es finito o infinito, diremos que G es un grafo finito o infinito respectivamente.*

Definición 3.6. *El* ***grado de un vértice*** *v, que denotaremos por $\delta(v)$, de un grafo $G = (X, U)$ es del número de aristas de G que confluyen en v.*

Definición 3.7. *Un **recorrido** en un grafo $G = (X, U)$ es una sucesión de vértices de G $v_0, v_1, \cdots, v_n$ tales que v_i y v_{i+1} son adyacentes.*
*Si en la sucesión de vértices no hay ninguno repetido, se dice que el recorrido es simple o que tenemos un **camino**.*

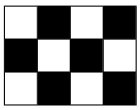
*A los vértices v_0 y v_n se les denomina extremos del recorrido y se dice que el recorrido une v_0 con v_n. La **longitud del recorrido** es el número de aristas que contiene.*

*Un recorrido se dice **cerrado** si sus extremos coinciden. Si, además, los únicos vértices repetidos en un recorrido cerrado son los extremos, el recorrido se denomina **ciclo**. Si el recorrido cerrado no repite aristas, se denomina **circuito**.*

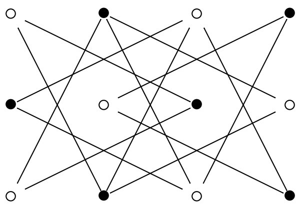
Definición 3.8. *Diremos que un grafo G es **conexo** si tiene una única componente, es decir, si dos vértices cualesquiera se pueden unir por un camino. Si hay dos vértices que no se pueden unir por un camino, entonces el grafo es **no conexo**.*

Definición 3.9. *Un grafo $G = (X, U)$ se denomina **bipartido** si $X = X_1 \bigcup X_2$ con $X_1 \bigcap X_2 = \emptyset$ y cada arista de G es de la forma x, y con $x \in X_1$ y $y \in X_2$. Si cada vértice de X_1 está unido con todo vértice de X_2 y viceversa, se tiene un **grafo bipartido completo**; si $|X_1| = m$ y $|X_2| = n$, el grafo se denota por $K_{m,n}$. Evidentemente, $K_{m,n} = K_{n,m}$.*

Transformaremos el tablero de ajedrez en un grafo de $m \cdot n$ vértices. Cada casilla del tablero será un nodo o vértice del grafo, y las aristas que unen cada par de vértices serán los movimientos del caballo. Es decir, dos nodos estarán unidos si el caballo se puede mover de un nodo al otro. Por ejemplo, si tenemos el siguiente tablero:



El grafo que obtendremos con los posibles movimientos del caballo desde casilla, será el siguiente:



Por lo tanto, para poder resolver el problema debemos encontrar un camino que pase por todos los vértices del grafo una sola vez. A este camino se le conoce como ciclo hamiltoniano.

Definición 3.10. *Se dice que un grafo $G = (X, U)$ tiene un **ciclo hamiltoniano** si existe un ciclo de G que contiene a todos los vértices de X. Un camino hamiltoniano es un camino de G que contiene todos los vértices.*

Definición 3.11. *Un grafo que contiene un ciclo hamiltoniano se denomina **grafo hamiltoniano**.*

Si observamos el grafo que hemos obtenido del tablero, los nodos blancos nunca tienen una arista que los una con un nodo blanco. Esto se debe al movimiento del caballo. El caballo siempre mueve en forma de L, por lo que, debido a la disposición de las casillas en el tablero, el caballo nunca podrá moverse de una casilla de un color a otra del mismo color. Luego todos los grafos serán grafos bipartidos, ya que podemos separar los nodos en dos conjuntos dependiendo del color y la unión de estos dos conjuntos, nos proporcionará el grafo completo.

Una condición necesaria que se debe dar para que un grafo bipartido tenga un ciclo hamiltoniano es la siguiente. El orden de los conjuntos que forman el grafo bipartido, tiene que ser el mismo. Supongamos que tenemos un grafo bipartido G, cuyos vértices están divididos en dos conjuntos B y N. Un ciclo hamiltoniano irá alternando vértices blancos con vértices negros, por lo tanto, el número de vértices deberá ser el mismo. Además, todos los vértices deberán tener mínimo grado 2.

Corolario 3.1. *Se llama **punto de corte** en un grafo a un vértice v tal que al eliminar v y las aristas que lo tienen por extremo, el grafo resultante resulta no conexo. Por lo tanto, un grafo hamiltoniano no tiene vértices de corte.*

No obstante, que un grafo no tenga puntos de corte no implica que el grafo sea hamiltoniano, ya que puede haber grafos sin puntos de corte que no sean hamiltonianos.

Se pueden obtener una serie de condiciones para que un tablero de $m \times n$ no tenga un ciclo hamiltoniano. Veamos cuáles son estas condiciones [18].

Condición 3.1. *m y n son ambos impares.*

Demostración. Lo probaremos mediante una contradicción, supondremos que existe un ciclo hamiltoniano siendo ambos impares, y llegaremos a dicha contradicción. Como hemos visto, para que un grafo bipartido tenga un ciclo hamiltoniano, los conjuntos que forman el grafo bipartido deben tener el mismo número de vértices, por lo tanto, el orden del grafo será un número par, luego, el número de casillas del tablero será un número par. Si un tablero de $n \times m$ tiene un ciclo hamiltoniano entonces $m \cdot n$ será un número par. Sean m y n de la forma $m = 2a + 1$ y $n = 2b + 1$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $m \cdot n = (2a + 1) \cdot (2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1$, por lo tanto, $m \cdot n$ es un número impar. Como hemos llegado a una contradicción, si m y n son ambos impares, no existe un ciclo hamiltoniano. □

Condición 3.2. *$m = 1, 2$ ó 4.*

Demostración. Veamos qué ocurre cuándo una de las dos es 1,2 ó 4. El caso $m = 1, 2$ es trivial, ya que las dimensiones del tablero impiden que el caballo se mueva. En el caso $m = 1$ el caballo no se puede mover y para el caso $m = 2$, el caballo no podrá completar todo el tablero dado que la casilla $(1, 1)$ solo tiene una arista.

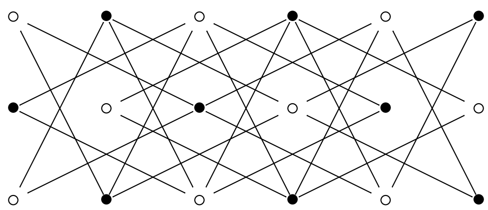
El caso $m = 4$ lo probaremos por contradicción. Esta demostración ha sido dada por Louis Pósa, un matemático húngaro. Supongamos que existe un ciclo hamiltoniano de la forma $\{v_1, v_2, \cdots, v_{4n}, v_1\}$. Podemos colorear los vértices en dos colores, rojo y azul por ejemplo, teniendo los vértices de las filas 1 y 4 de color rojo y los vértices de las filas 2 y 3 de color azul. La coloración no nos sirve para hacer una bipartición del grafo, dado que hay vértices azules adyacentes a vértices azules. Sin embargo, cada vértice rojo solo tiene adyacentes vértices azules, recordando la forma del movimiento del caballo. En el supuesto de tener un ciclo hamiltoniano, los vértices rojos siempre tienen que estar separados por vértices azules, por lo tanto, como tenemos $2n$ vértices de cada color, los colores se deben alternar en el ciclo. Si empezamos en el vértice $v_1 = (1, 1)$, que es un vértice rojo, podemos concluir que todos los vértices de la forma v_{2k+1} tendrán que ser vértices rojos. Pero con la coloración original del tablero de ajedrez podemos afirmar también que los vértices de la forma v_{2k+1} son blancos, por lo tanto, todos los vértices rojos son blancos, pero esto contradice el patrón de color elegido para las dos coloraciones, por lo tanto no es posible encontrar un ciclo hamiltoniano. □

La última condición que se puede dar para que no exista un ciclo hamiltoniano es:

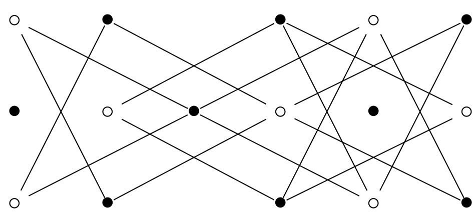
Condición 3.3. *$m = 3$ y $n = 4$, 6 o 8.*

Demostración. El caso 3×4 queda excluido por el apartado anterior, veamos qué ocurre con los casos restantes.

Caso 3×6. Para este caso, dibujemos primero el grafo correspondiente a este tablero.

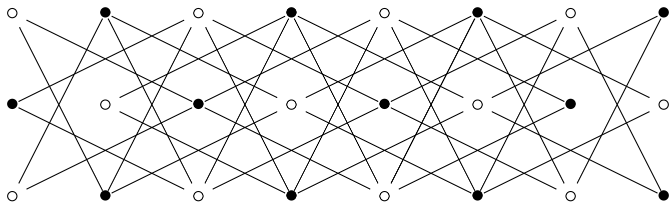


Si ahora eliminamos dos vértices de este tablero, ¿qué ocurre?



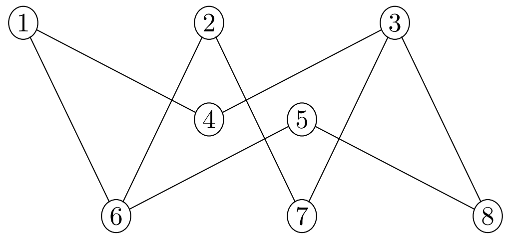
Cómo podemos observar, nos queda un grafo no conexo dado que hay dos vértices a los que no podemos llegar por ningún camino. Además, también hemos construido tres componentes conexas, por lo que estos dos vértices son puntos de corte del grafo, como ya hemos visto anteriormente, un grafo hamiltoniano no puede tener puntos de corte, por lo tanto un tablero de 3×6 no tiene grafos hamiltonianos.

Caso 3×8: Dibujemos también el grafo para estudiar este caso.



En primer lugar observamos que si existe un ciclo hamiltoniano, en dicho ciclo, las aristas de los vértices que tienen grado 2, deben pertenecer al ciclo. Estos vértices son los que se encuentran en a esquina izquierda y derecha. Con las coordenadas que les hemos dado antes a las casillas, los vértices que tienen grado 2 son $(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(1,8),(2,8),(3,8),(2,7)$, por lo tanto estos vértices deben pertenecer al ciclo. Estas aristas forman seis componentes conexas. Las aristas de los vértices de grado 2 no une estos vértices con los vértices $(2,4),(2,5)$, por lo que estos dos vértices las consideraremos como componentes conexas triviales.

Definimos un nuevo grafo, $G^*(3,8)$. En este grafo cada vértice representa una componente conexa, y éstos se unen siempre que haya una arista en el grafo original conectando un extremo de la una componente conexa con otra. Si existe un ciclo hamiltoniano en el grafo original, entonces estará presente ene el grafo $G^*(3,8)$.



En primer lugar, observamos qué los vértices 1,2,4,5,7 y 8 tienen grado 2, luego las aristas que confluyen en dichos vértices deben pertenecer al ciclo. Como 2 de las 3 aristas de los vértices 6 y 3 ya han sido usadas, la tercera no puede estar en el ciclo, por lo que si pintamos estas líneas, no podremos completar el camino a menos que utilicemos las tres aristas de estos vértices, algo que no puede ocurrir en un grafo hamiltoniano, por lo tanto este grafo no es hamiltoniano. Si este grafo no lo es, el original tampoco, por lo que hemos probado que el grafo de 3×8 no es hamiltoniano. $\square$

Excluyendo estas dimensiones para el tablero, cualquier tablero tiene un ciclo hamiltoniano. La pregunta que nos hacemos ahora es, cómo podemos construir todos los posibles recorridos. Para ello habrá que desarrollar un método que nos permita construir nuevos caminos a partir de otros más pequeños. El siguiente lema nos permite añadir 4 columnas o filas más a un camino ya realizado, siempre que 10 aristas específicas pertenezcan al recorrido original.

Lema 3.1. *Si $G(m,n)$ tiene un ciclo hamiltoniano que incluye las 10 aristas:*

$$(1,n-1)-(3,n);\ (4,n-1)-(2,n);\ (m,n-2)-(m-1,n);\ (m-2,n-1)-(m,n);\ (1,n)-(3,n-1);$$

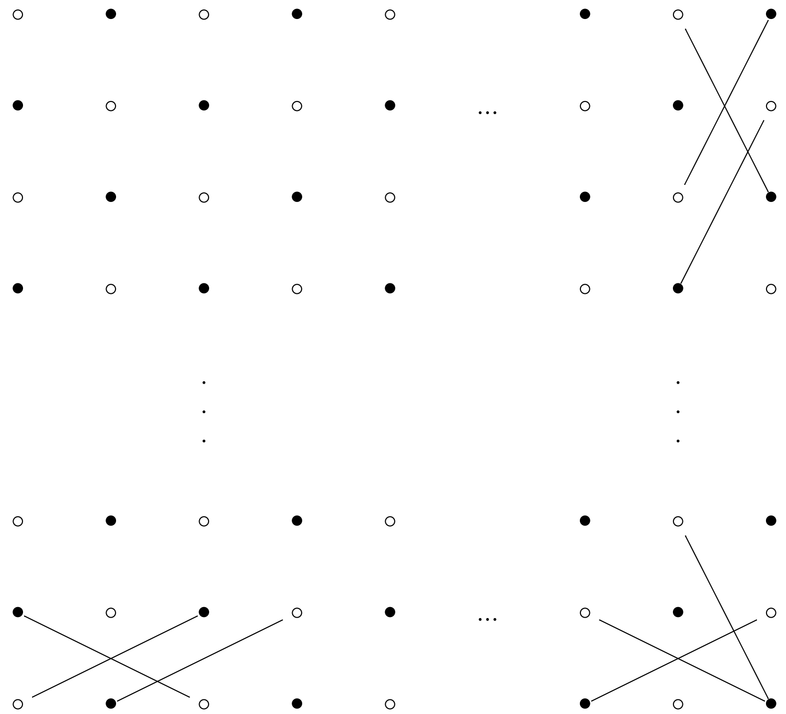
$$(m,2)-(m-1,4);\ (m-1,1)-(m,3);\ (m-2,n)-(m,n-1);\ (m-1,n-2)-(m,n);\ (m,1)-(m-1,3)$$

entonces, el grafo $G(m,n+4)$ también tiene un ciclo hamiltoniano que incluye las 10 siguientes aristas:

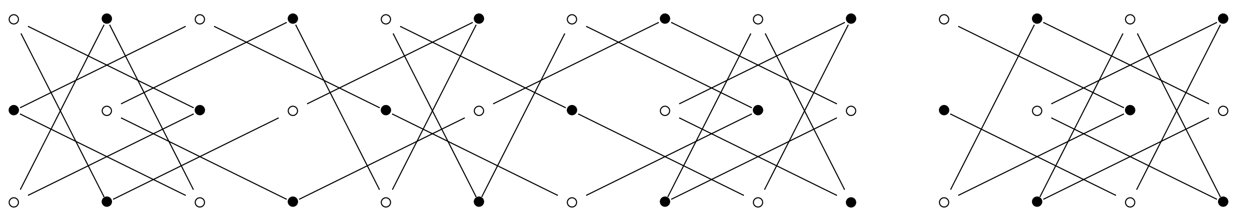
$$(1,n+3)-(3,n+4);\ (4,n+3)-(2,n+4);\ (m,n+2)-(m-1,n+4);\ (m-2,n+3)-(m,n+4);\ (1,n+4)-(3,n+3);$$

$$(m,2)-(m-1,4);\ (m-1,1)-(m,3);\ (m-2,n+4)-(m,n+3);\ (m-1,n+2)-(m,n+4);\ (m,1)-(m-1,3)$$

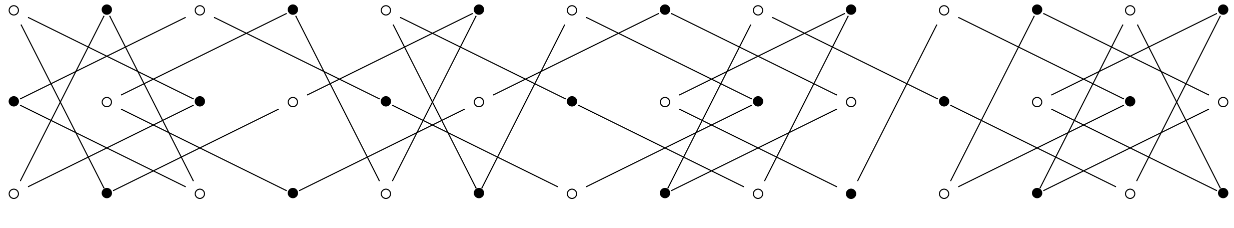
Demostración. Las 10 aristas requeridas para poder aplicar el lema en un grafo $m \times n$ se pueden ver en el siguiente grafo.



Para $m = 3$, estas 10 aristas degeneran en un conjunto de 7 aristas debido al tamaño del tablero. Para todos los valores de m y n, cuatro de esas esas 10 aristas deben pertenecer al ciclo debido a que unen los vértices que se encuentran en las esquinas del tablero. Estas aristas son las siguientes, $(1, n) - (3, n-1)$, $(m-2, n-1) - (m, n)$, $(m-1, n-2) - (m, n)$ y $(m, 1) - (m-1, 3)$. Para añadir cuatro columnas a cualquier ciclo hamiltoniano del grafo $G(3, n)$ y que contenga las 7 aristas, construimos una componente conexa de 3×4 con un recorrido no cerrado que conecte todos los nodos del grafo. Ahora eliminamos las aristas $(1, n-1) - (3, n)$ del ciclo y añadimos las aristas $(1, n-1) - (2, n+1)$ y $(3, n) - (1, n+1)$ para incorporar la nueva componente al grafo. En la siguiente figura tenemos un ejemplo de lo que ocurriría para el caso $n = 10$. En este caso, el nuevo ciclo hamiltoniano que surge del grafo $G(3, 14)$ también contiene las siete aristas necesarias para poder extender el grafo, por lo que este nuevo grafo también se puede utilizar para otras extensiones.

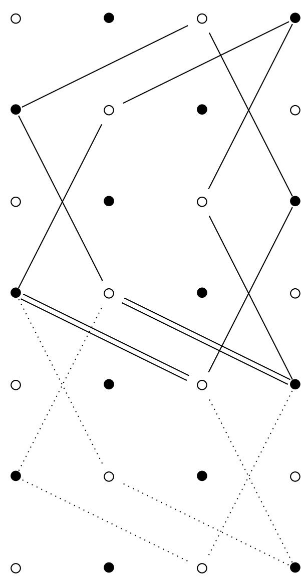


Ahora eliminamos la arista $(1, 9) - (3, 10)$ para poder unir el grafo $G(3, 10)$ con la nueva componente y crear un grafo con 14 columnas en vez de 10. Insertando las aristas $(1, 9) - (2, 11)$ y $(3, 10) - (1, 11)$, el grafo quedará de la siguiente forma:

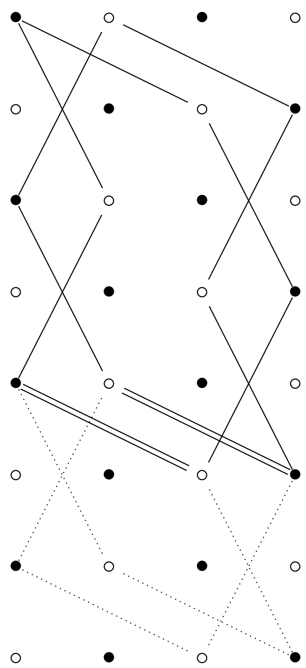


Para $m \geq 5$, usaremos un grafo $m \times 4$ al que llamaremos $H(m, 4)$, cuyas aristas siguen siendo como el movimiento del caballo. Este grafo se obtiene mediante $G(m, 4)$, eliminando todas las aristas que unen los nodos de la segunda columna con los nodos de la tercera columna, y aquellas que unen los nodos con dos columnas aparte, exceptuando aquellas que unan los nodos de las filas 1 y 2, y las filas m-1 y m. El grafo $H(m, 3)$ resultante, es un grafo regular de grado 2, es decir, cada nodo tiene grado 2. Además, por su construcción, las aristas del ciclo hamiltoniano envuelven el borde del tablero lo más cerca posible, aunque no hay un único ciclo. Se puede ver que $H(m,4)$ tiene un par de $2m-ciclos$ cuando m es impar y $4m-ciclos$ cuando m es par. Dado que este factor es clave para la construcción, lo probaremos por inducción.

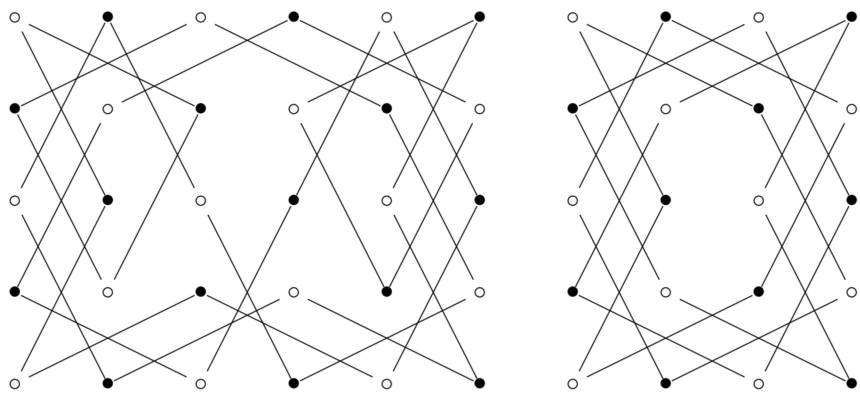
La siguiente figura muestra uno de los ciclos en $H(5,4)$. El otro ciclo se puede crear utilizando la simetría que se encuentra en el centro del tablero, en este caso entre las columnas 2 y 3. Las dos filas que añadimos a la última, sugieren cómo se puede extender el ciclo a $H(7,4)$. Así, en este caso en concreto, eliminamos las aristas $(4,1)-(5,3)$ y $(4,2)-(5,4)$, marcadas con una doble línea en el grafo, e insertamos las aristas $(4,1)-(6,2)$, $(4,2)-(6,1)$, $(6,1)-(7,3)$, $(6,2)-(7,4)$, $(5,3)-(7,4)$ y $(5,4)-(7,3)$, pintadas con una línea discontinua. Repitiendo esta extensión para el otro ciclo, podemos obtener el par de ciclos en $H(m,4)$ cuando m es impar.



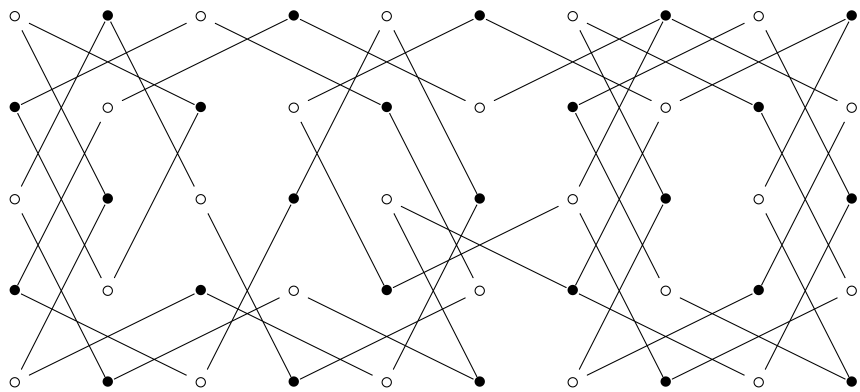
De forma similar, la siguiente figura muestra dos de los ciclos del grafo $H(6,4)$. Al igual que ocurría para el grafo $H(5,4)$, los otros dos ciclos restantes se pueden dibujar utilizando la simetría del centro del tablero. Análogamente a lo realizado para el caso impar, extendemos los ciclos eliminando las aristas $(5,1)-(6,3)$ y $(5,2)-(6,4)$, dibujadas con doble línea en el grafo, e insertamos las aristas $(5,1)-(7,2)$, $(5,2)-(7,1)$, $(7,1)-(8,3)$, $(7,2)-(8,4)$, $(6,3)-(8,4)$ y $(6,4)-(7,3)$, dibujadas con una línea discontinua.



Por último, para extender un ciclo hamiltoniano en $G(m,n)$ con m impar a uno de la forma $G(m,n+4)$, colocaremos $H(m,4)$ junto a nuestro grafo $G(m,n)$ tal y como tenemos en la siguiente figura.



Eliminamos las aristas $(1,n)-(3,n-1)$ y $(2,n)-(4,n-1)$ del ciclo hamiltoniano y $(1,n+2)-(3,n+1)$ y $(2,n+2)-(4,n+1)$ de $H(m,4)$ e incorporamos los dos ciclos del de $H(m,4)$ incluyendo las aristas $(1,n)-(2,n+2)$, $(2,n)-(1,n+2)$, $(3,n-1)-(4,n+1)$ y $(4,n-1)-(3,n+1)$ para crear un nuevo ciclo hamiltoniano en $G(m,n+4)$. El nuevo ciclo contiene las 10 aristas impuestas. La extensión de $G(5,6)$ a $G(5,10)$ queda ilustrada en la siguiente figura.



De forma similar, para m par, podemos incorporar $H(m,4)$ al ciclo hamiltoniano de $G(m,n)$ eliminando primero las siguientes cuatro aristas del ciclo hamiltoniano:

$$(1,n-1)-(3,n);\ (1,n)-(3,n-1);\ (m-2,n-1)-(m,n);\ (m-2,n)-(m,n-1)$$

y después eliminando del grafo $H(m,4)$ las siguientes cuatro aristas:

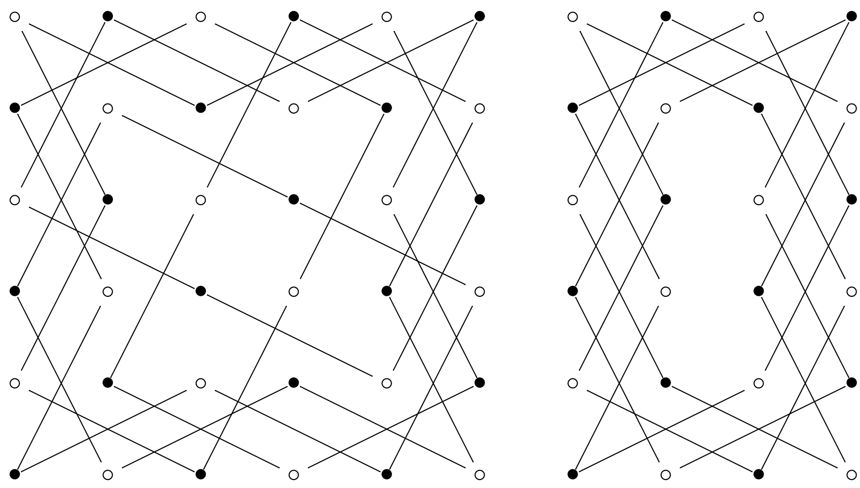
$$(2,n+1)-(4,n+2);\ (2,n+2)-(4,n+1);\ (m-3,n+1)-(m-1,n+2);\ (m-3,n+2)-(m-1,n+1)$$

Por último, incluimos las siguientes aristas:

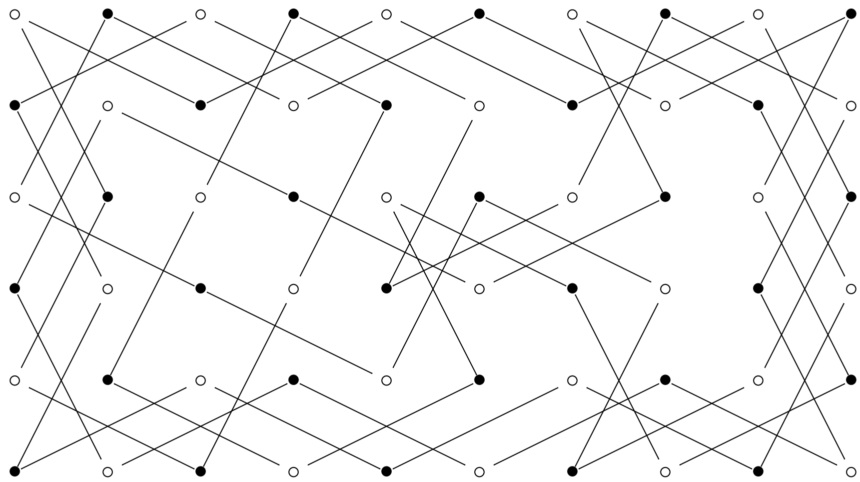
$$(1,n-1)-(2,n+1);\ (1,n)-(2,n+2);\ (m-2,n-1)-(m-3,n+1);\ (m-2,n)-(m-3,n+2)$$

$$(3,n)-(4,n+2);\ (3,n-1)-(4,n+1);\ (m,n)-(m-1,n+2);\ (m,n-1)-(m-1,n+1)$$

Para verlo mejor con un ejemplo, tomemos $m=n=6$. Por un lado tenemos el ciclo hamiltoniano de $G(6,6)$, y por el otro $H(6,4)$.



Ahora eliminando las aristas correspondientes e incluyendo las necesarias, obtener la siguiente extensión de $G(6,6)$:



Con esto, completamos la demostración del lema. □

El lema puede ser usado para añadir cuatro columnas o filas a una solución ya conocida. Por lo tanto, podemos construir soluciones para $G(m,n)$ siempre que tengamos una colección de soluciones iniciales para cada adición sobre la clase del par $[i,j]$ módulo 4.

$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$
$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$

Cuadro 3.1: Posibles clases módulo 4

A primera vista, podría parecer que necesitamos 16 casos debido a las 16 posibles casillas del tablero, pero, debido a la simetría del tablero, podemos girar el tablero sobre su diagonal principal, intercambiando i y j, reduciendo el número de casos posibles a 10. Imponiendo las condiciones dadas anteriormente, podemos excluir algunas de estas clases.

Por la condición 3.1, podemos excluir aquellas clases en las que ambas componentes sean impares, por lo tanto, podemos excluir $[1,1]$, $[1,3]$ y $[3,3]$. Con esto nos quedamos con 7 clases. Por la condición 3.2, los valores para $m = 1$, 2 y 4 no nos sirven, luego los posibles miembros más pequeños de estas 7 clases serán 3×6, 3×8, 5×6, 5×8, 6×6, 6×8 y 8×8. Por la condición 3.3, 3×6 queda eliminado. Para reemplazarlo y poder generar todos los demás órdenes de la misma clase, debemos incluir tanto 7×6 como 3×10, añadiendo 4 filas y 4 columnas respectivamente. Lo mismo ocurre con 3×8, lo que nos obliga a sustituirlo por 7×8 y 3×12. Por lo tanto, hay 9 casos específicos cuyos casos ciclos hamiltonianos deben ser construidos individualmente para utilizar el lema 3.1 para posteriormente utilizar la inducción para encontrar el camino del caballo. No hay un método particular para generar estas soluciones, por ello, daremos aquellas que guardan una mayor simetría, como se pueden ver en la siguiente imagen.

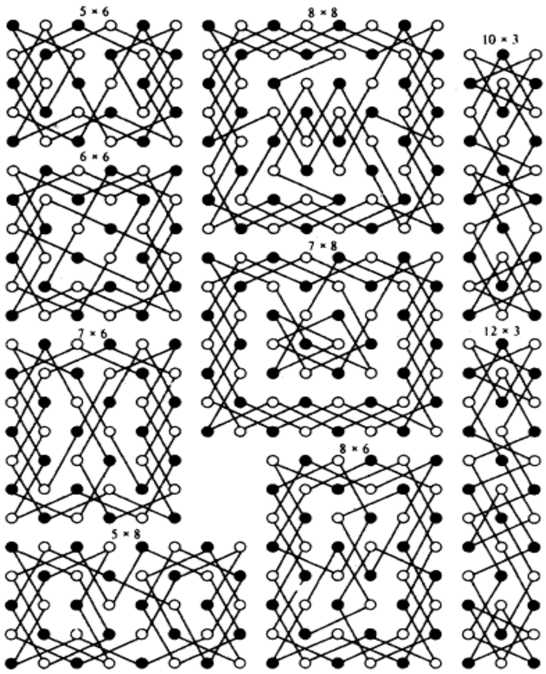


Figura 3.6: Los 9 ciclos hamiltonianos que forman la base para la construcción por inducción

Una característica curiosa que podemos encontrar en algunos caminos del caballo dados por matemáticos como Euler, forman lo que llamamos un *camino semi-mágico*. Un cuadrado mágico se da cuando las columnas, las filas y las diagonales, suman todas lo mismo. Decimos que un cuadrado es semi-mágico cuando solo coincide el valor de la suma de las columnas y las filas. Por ejemplo, tenemos el siguiente camino numerado.

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

Figura 3.7: Camino cerrado del caballo numerado

Este es un camino semi-mágico, podemos comprobarlo sumando los números de las columnas y las filas. Si sumamos los números que forman cada columna y cada fila, obtenemos siempre el valor 260, en cambio, si sumamos los valores de las diagonales no obtenemos 260. En el año 2013, se demostró, con ayuda de un ordenador, que el caballo no puede crear un camino mágico.

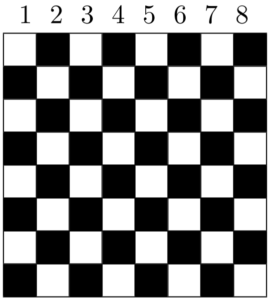
Otro problema que se puede estudiar matemáticamente es el **Problema de las n reinas**. Este problema consiste en encontrar una posición para n reinas en un tablero de $n \times n$ de tal modo que no se ataquen entre ellas. Es decir, dos reinas no pueden encontrarse en la misma fila, columna o diagonal. Para $n = 8$ se han encontrado 92 posibles colocaciones de las reinas para que no se ataquen entre sí. Para $n = 1000$, un grupo de investigadores de la Universidad de Saint Andrews ofrece una recompensa de un millón de dólares a la primera persona que cree un algoritmo matemático capaz de resolver este problema, pero este problema tiene un par de restricciones. Algunas de las reinas ya se encuentran colocadas en el tablero, por lo que el problema consistiría en encontrar las reinas restante, además, el algoritmo que resuelva este problema deberá ser un algoritmo de complejidad polinomial en vez de exponencial, por lo que, tanto si se encuentra este algoritmo como si demuestra que no existe dicho algoritmo, se conseguirá dar una solución al problema P vs NP, uno de los problemas del milenio[2]. Dado que el problema de las n reinas no se ha resuelto, estudiaremos cómo se ha llegado a resolver el problema de las 8 reinas.

Para el caso $n = 8$ se sabe que existen 92 diferentes diferentes colocaciones, este número fue dado por Gauss

[2]Uno de los 7 problemas matemáticos cuya resolución está premiada con la suma de un millón de dólares cada uno.

(1777-1855) y, en el año 1874, fue probado y confirmado por J.W.L. Glaisher (1848-1928) [9].

Veamos una forma de resolver el problema de las 8 reinas. Para comenzar, numeramos cada columna del tablero del 1 al 8. Como dos reinas no pueden estar en la misma fila, habrá una reina por fila, luego podemos usar una lista de números que indiquen en que columna se encuentra cada una de las 8 reinas. El primer número indicará en que columna se encuentra la reina de la primera fila, el segundo número indicará la columna para la reina de la segunda fila, así con las 8 filas del tablero. Además, como no podemos poner dos reinas en la misma columna, tampoco tendremos números repetidos.



Siguiendo este modelo, por ejemplo, el vector $\{2, 7, 4, 6, 3, 5, 8, 1\}$ podría ser una colocación, pero, si colocamos las reinas en un tablero, podemos notar que las reinas de las filas 1, 3 y 7 se encuentran en la misma diagonal. Lo mismo ocurre con las reinas de las filas 2 y 8. Luego no es una colocación válida. Para encontrar una solución correcta al problema, tenemos que tener en cuenta que dos reinas no se pueden encontrar en la misma diagonal.

Llamemos i a las filas y j a las columnas, luego el par (i_n, j_n) será una casilla del tablero de ajedrez, con $n \in \{1, \cdots, 8\}$. Supongamos que tenemos dos reinas colocadas en las casillas (i_1, j_1) y (i_2, j_2). Definimos ahora dos condiciones para comprobar si dos reinas se encuentran en la misma diagonal.

- Si de la **resta** entre el número de columna y el número de fila de dos reinas restan lo mismo, se encontrarán en la misma diagonal. Esto se da para las diagonales que bajan de **izquierda a derecha**. Es decir, si $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$ o $j_1 - i_1 = j_2 - i_2$, entonces las dos reinas se encuentran en la misma diagonal.
- Si la **suma** entre el número de columna más el número de fila de dos reinas suman lo mismo, se encontrarán en la misma diagonal. Esto se da para las diagonales que bajan de **derecha a izquierda**.Es decir, si $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$ o $j_1 + i_1 = j_2 + i_2$, entonces las dos reinas se encuentran en la misma diagonal.

En el ejemplo anterior teníamos que la fila 1, 3 y 7 se encontraban en la misma diagonal. Si hacemos las restas de estas columnas obtenemos:

- Fila 1, columna 2: $2 - 1 = 1$.
- Fila 3, columna 4: $4 - 3 = 1$.
- Fila 7, columna 8: $8 - 7 = 1$.

Como podemos comprobar, la resta es la misma en todas las reinas, por lo que se encuentran en la misma diagonal. De la misma forma, si hacemos la suma de las otras dos reinas que se encontraban en la misma diagonal, tenemos:

- Fila 2, columna 7: $7 + 2 = 9$.
- Fila 8, columna 1: $1 + 8 = 9$.

Una vez que tenemos estas condiciones para colocar las reinas, podríamos definir computacionalmente un algoritmo que nos permitiera calcular estas soluciones.

El problema de las n reinas es una generalización del problema de las 8 reinas. A lo largo de los años se han desarrollado numerosas maneras de plantear y solucionar este problema. Entre ellas encontramos la solución mediante el algoritmo de vuelta atrás, conocido por su nombre inglés *Backtracking* y el algoritmo de ramificación y acotación, conocido como *Branch and Bound*. Este último se aplica para resolver problemas de optimización con restricciones. Para entender mejor cómo funcionan estos algoritmos, daremos unas definiciones ampliando las ya dadas para grafos, utilizando el libro [11].

Definición 3.12. *Se dice que un grafo G es un **árbol** si es conexo y no tiene ciclos.*

Muchas de las aplicaciones de la teoría de grafos hacen uso de un tipo especial de árbol, denominado **árbol con raíz**. Es un árbol en el que se ha distinguido uno de los vértices por encima del resto, este vértice será el llamado **raíz**. Más concretamente:

Definición 3.13. *Un árbol con raíz es un par (G, v^*) donde G es un árbol y v^* es un vértice de G que recibe el nombre de **raíz**. Una **hoja** es un vértice de grado 1 que no sea la raíz; cualquier otro vértice se denomina **interno** o **de decisión**. En particular, la raíz es un vértice interno.*

La definición 3.12 no refleja una de las características más importantes de los árboles. Los árboles son los grafos conexos que se pueden formar con el menor número de aristas. Ésta y otras propiedades quedan recogidas en el siguiente resultado.

Teorema 3.2 (Propiedades de los árboles). *Si $G = (V, E)$ es un árbol con $|V| \geq 2$, entonces:*

1. *Para cada par de vértices x e y, existe un único camino de x a y en G.*
2. *El grafo que se obtiene de G al eliminar cualquier arista, tiene dos componentes conexas, cada una de las cuales es un árbol.*
3. *Si añadimos una arista cualquiera a G, se forma un ciclo.*
4. $|E| = |V| - 1$.
5. $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|V| - 2$.

Demostración. Las dos primeras son inmediatas. La primera se cumple dado que un árbol no tiene ningún ciclo. La segunda, al no tener ningún ciclo y eliminar una arista, obtendremos dos árboles.

Para probar la tercera, consideremos dos vértices x e y no adyacentes de G. Como por la primera propiedad existe un camino entre x e y, al añadir la nueva arista xy, se forma un ciclo.

Para probar la cuarta propiedad, basta con asociar a cada vértice su única arista de entrada, la cual proviene del vértice interno adyacente más próximo a la raíz. Como todos los vértices excepto la raíz tienen una sola de tales aristas, habrá $|V| - 1$ aristas.

Por último, la quinta propiedad se deduce de la propiedad anterior y del resultado que asegura para cualquier grafo $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$. □

Los árboles con raíz se suelen representar con la raíz en la parte superior del diagrama y el árbol creciendo hacia abajo, de forma que queda estructurado en niveles.

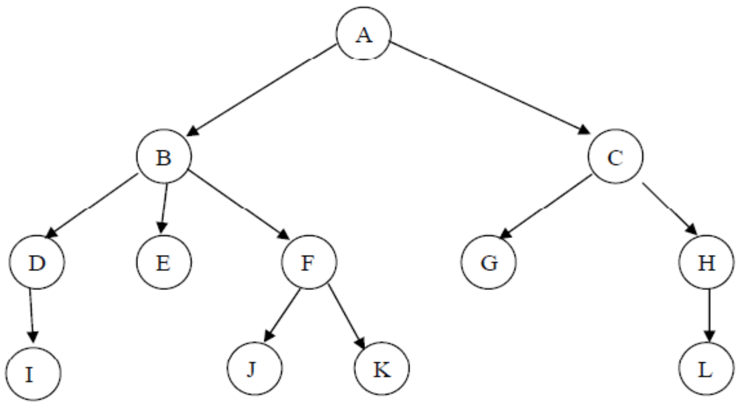


Figura 3.8: Árbol con raíz el vértice A

Definición 3.14. *Sea (G, v^*) un árbol con raíz. Llamamos **nivel** de un vértice x de G a la longitud del único camino entre v^* y x. La altura h de G es el máximo de los niveles de los vértices. Si todas las hojas del árbol se encuentran en los niveles h y $h - 1$, diremos que el árbol es **equilibrado**.*

Una vez vistas las definiciones, podemos explicar cómo funcionan los algoritmos que se han utilizado para intentar encontrar una solución al problema de las n reinas.

El algoritmo Backtracking se asemeja a un recorrido en profundidad dentro de un grafo dirigido, normalmente un árbol. El objetivo del recorrido es encontrar soluciones para algún problema concreto. Esto se consigue construyendo soluciones parciales a medida que avanza el recorrido. Estas soluciones parciales se limitan a las regiones en las que se puede encontrar una solución completa. El recorrido tiene éxito si se puede definir una solución. En el caso de buscar solo una solución, el algoritmo puede detenerse o buscar más soluciones. Por otro lado, el recorrido falla si en alguna etapa, la solución parcial construida hasta el momento no se puede terminar de completar. Podemos entenderlo como una exploración en profundidad de un grafo en el que cada vértice es un posible estado de la solución del problema, y cada arista representa la transición entre dos estados de la solución.

Al igual que Backtracking, el algoritmo Branch and Bound realiza una enumeración parcial del espacio de soluciones basándose en la generación de un árbol, donde cada arista nos lleva a una posible solución posterior a la actual. La principal diferencia con el algoritmo Bractracking, es que el algoritmo Branch and Bound se encarga de encontrar aquellas ramificaciones en las cuales las soluciones dadas no están siendo óptimas, podando esa arista del árbol. Para ello, el algoritmo dispone de una función de costo, que estima el valor óptimo de aquellas soluciones alcanzables desde un vértice. Si mediante esta función se determina que cualquiera de las soluciones que podremos encontrar es peor que la mejor solución hallada hasta el momento, no necesitaremos seguir explorando por esa rama del árbol, por lo que realiza el proceso de poda. El proceso finaliza cuando se encuentra una solución o cuando no quedan ningún vértice que se pueda utilizar.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos podido conocer juegos de mesa y descubrir las matemáticas que hay en ellos, aunque a primera vista no se pudieran ver con claridad. Después del análisis realizado, hemos notado una gran variedad de contenidos matemáticos que se pueden trabajar usando estos juegos como herramientas. Aunque existe más variedad de juegos de mesa que se pueden estudiar matemáticamente, debido a la extensión del trabajo, hemos seleccionado solo aquellos que consideramos más interesantes para cada capítulo.

La principal intención de este trabajo ha sido mostrar que los juegos de mesa se pueden utilizar para algo más que para pasar el rato jugando, con ellos podemos explicar conceptos matemáticos, unos más complejos que otros, y utilizarlos durante las clases para ayudarnos a explicar estos conceptos.

Tanto para enseñanza primaria como en secundaria, es claro que existe una gran diversidad de juegos de mesa que se pueden utilizar durante las clases para enseñar matemáticas pero, por el contrario, no se conocen tantos juegos que se puedan utilizar durante el grado. Con este trabajo hemos visto que algunos, debido a su complejidad, se pueden estudiar en primaria o secundaria, pero también hemos podido ver que otros exigen un nivel más alto de conocimientos matemáticos, como podría el Problema del Caballo. Todos los juegos estudiados en este trabajo son de dominio público, por lo que sería fácil obtenerlos para las clases, o por ejemplo, en el caso del juego *Can't Stop*, no sería necesario comprar el tablero. Conociendo las reglas, bastaría con pintar el tablero en una pizarra y utilizar colores para los diferentes jugadores, haciendo que sea más accesible para todos.

Como se ha podido ver en el trabajo, la gran mayoría de los conceptos utilizados para la realización del mismo se han estudiado durante el grado de matemáticas de la Universidad de la Rioja, utilizando para estudiarlos los apuntes necesarios. Para este grado de esta universidad, podemos hacer un listado de las asignaturas en las que se encuentran presentes los conceptos estudiados.

- **Cálculo matricial y vectorial**: 1º Año. Obligatoria. Se estudian vectores como los que se ven en el juego *Set*.
- **Matemática discreta**: 1º Año. Obligatoria. Grafos y árboles, se estudian en el Problema del Caballo y en el problema de las n reinas.
- **Metodología de la programación**: 1º Año. Obligatoria. En esta asignatura se hace una introducción al cálculo de complejidad de los algoritmos, esta complejidad se puede ver en el caso del problema P vs NP, dado que si se encuentra un algoritmo polinomial o si se demuestra que no existe, se solucionaría el problema. Saber cuál es la complejidad de cada algoritmo nos puede servir para determinar si el algoritmo que hemos conseguido es óptimo.
- **Tecnología de la programación**: 1º Año. Obligatoria. Se estudia como funcionan los algoritmos recursivos, que se pueden utilizar para resolver problemas.
- **Sistemas informáticos**: 1º Año. Obligatoria. Se hace un recordatorio para la gente que nunca lo haya estudiado de números binarios, utilizados para definir una estrategia ganadora en el juego *Nim*.
- **Estadística**: 2º Año. Obligatoria. Todo lo relacionado con probabilidad referente al primer capítulo se puede utilizar en esta asignatura.
- **Modelización y optimización I**: 3º Año. Obligatoria. Se estudian las cadenas de Markov que se han utilizado en el algoritmo utilizado por Bill Butler para resolver el juego del Monopoly.
- **Investigación operativa**: 4º Año. Optativa. Se estudia el algoritmo Branch and Bound para resolver problemas lineales enteros, no se estudia como programarlo pero se estudian algunos ejemplos de algoritmos que son del mismo tipo, como el *Algoritmo de Land-Doig* o el *Algoritmo de Balas*.

Como se puede ver, hay varias asignaturas en las que se podrían aplicar los juegos estudiados en este trabajo. Con ello, pretendemos mostrar un lado diferente de las matemáticas, esperando que el lector tenga ganas de probar por sí mismo estos juegos

Gracias a este trabajo, he podido repasar conocimientos que he estudiado a lo largo de la carrera, así como aprender nuevos conceptos, a través de juegos de mesa que he podido y que me gustan jugar.

Bibliografía

[1] Bill Butler. Página web: *http://www.durangobill.com/Monopoly.html* (Mayo 2020)

[2] Donald E. Knuth. Página web: *https://www-cs-faculty.stanford.edu/ knuth/* (Mayo 2020)

[3] Eduardo Sáenz de Cabezón. Página web: *https://www.derivandodx.com/dobble-y-sus-matematicas/* (Mayo 2020)

[4] F. Kárteszi. Introduction to finite geometries. 1976. Editorial: Akadémiai Kiado.

[5] Francisco Javier Lázaro. Apuntes asignatura Modelización y Optimización. Curso 2016-2017.

[6] George Jelliss. Página web *https://www.mayhematics.com/t/t.htm*, 2000 - 2020. (Mayo 2020)

[7] Hannah Fry y Thomas Oléron. The Indisputable Existence of Santa Claus. 2017. Editorial: Transworld Digital.

[8] György Kiss y Tamás Szónyi. Finite Geometries. 2019. Editorial: CRC Press.

[9] J.W.L. Glaisher M.A. (1874). Philosophical Magazine and Journal of Sience. Vol. 48, pages 457-467.

[10] Jonathan Schaeffer. Revista Science, Vol 317, Issue 5844, 14 de septiembre de 2007.

[11] José Manuel Gutiérrez, Victor Lanchares. Elementos de Matemática Discreta. 2010. Editorial: Universidad de La Rioja. Servicio de publicaciones.

[12] József Beck. Combinatorial games. Tic-tac-toe theory. 2008. Editorial: Cambridge Uniersity Press.

[13] Página web: *http://sugarpillstudios.com/wp* (Junio 2020)

[14] Página web: *https://www.ennaranja.com/economia-facil/como-usar-las-matematicas-para-ganar-al-monopoly/* (Mayo 2020)

[15] Página web: *http://devir.es/* (Mayo 2020)

[16] Raúl Ibáñez. Página web: *https://culturacientifica.com/2016/06/15/matematicas-juego-cartas-set-1/* (Mayo 2020)

[17] Razvan Gabriel Iagar. Matemáticas y ajedrez. 2017. Editorial: Catarata.

[18] Schwenk, A.J. "Which rectangular chessboards have a knight's tour?". Mathematics Magazine, Vol. 64, No 5, 1991, pp. 325-332.

[19] Thomas S. Ferguson. Game Theory. 2014. Part I: Impartial Combinatorial Games.

[20] Zenaida Hernández. Apuntes asignatura Estadística. Curso 2015-2016.

[21] Zenaida Hernández. Apuntes asignatura Investigación Operativa. Curso 2017-2018.